Proyecto de Investigación

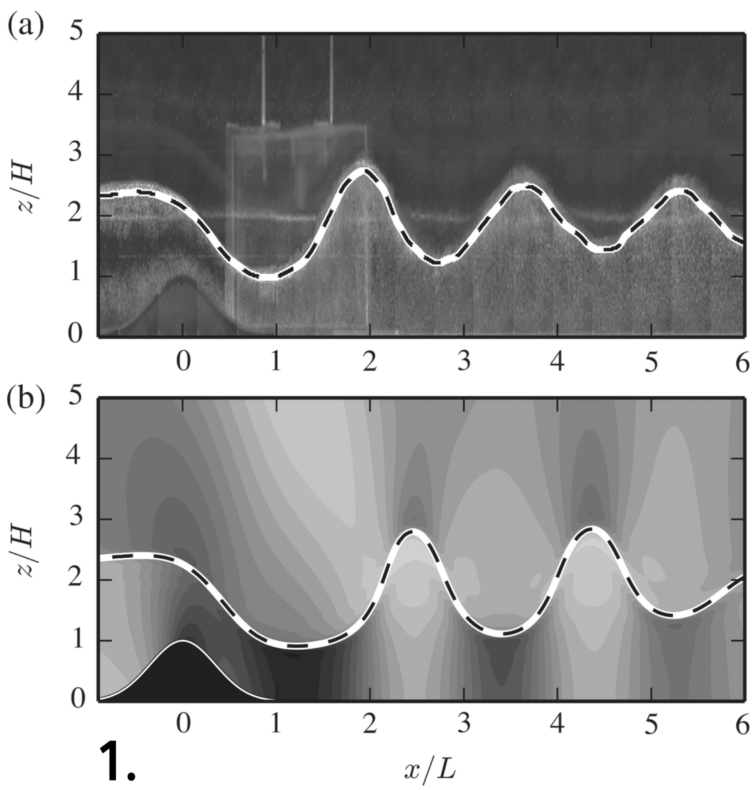
Centro de Ciencias de la Atmósfera, UNAM

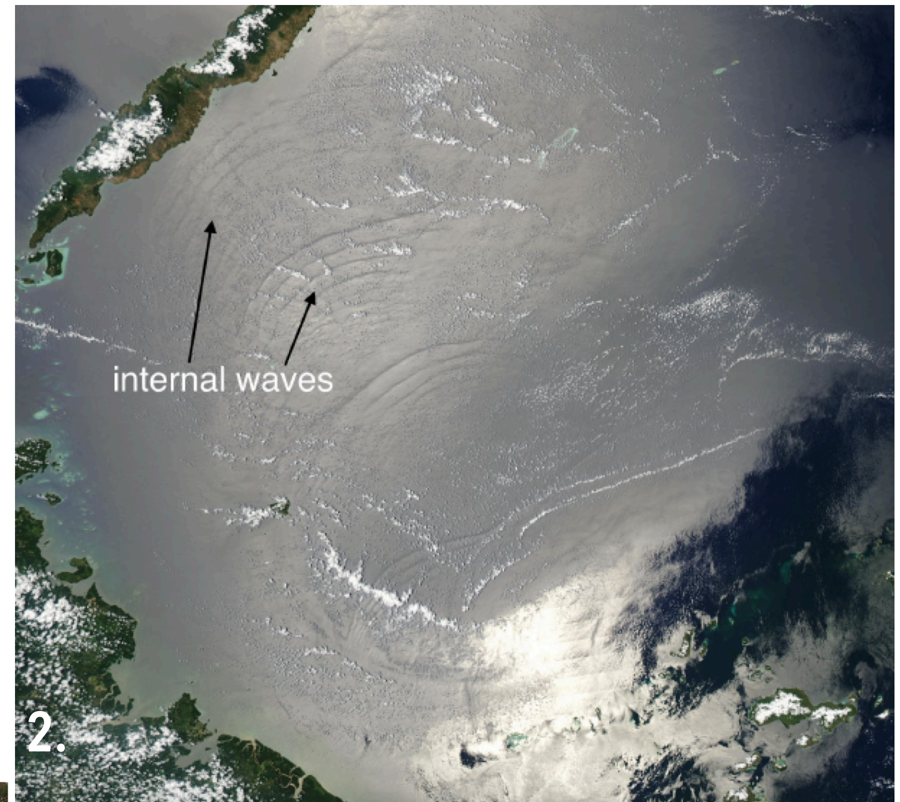
Ondas superficiales en el agua y ondas internas en fluidos estratificados: Retos modernos en la teoría y modelación de estas soluciones que describen fenómenos y procesos de la Tierra.

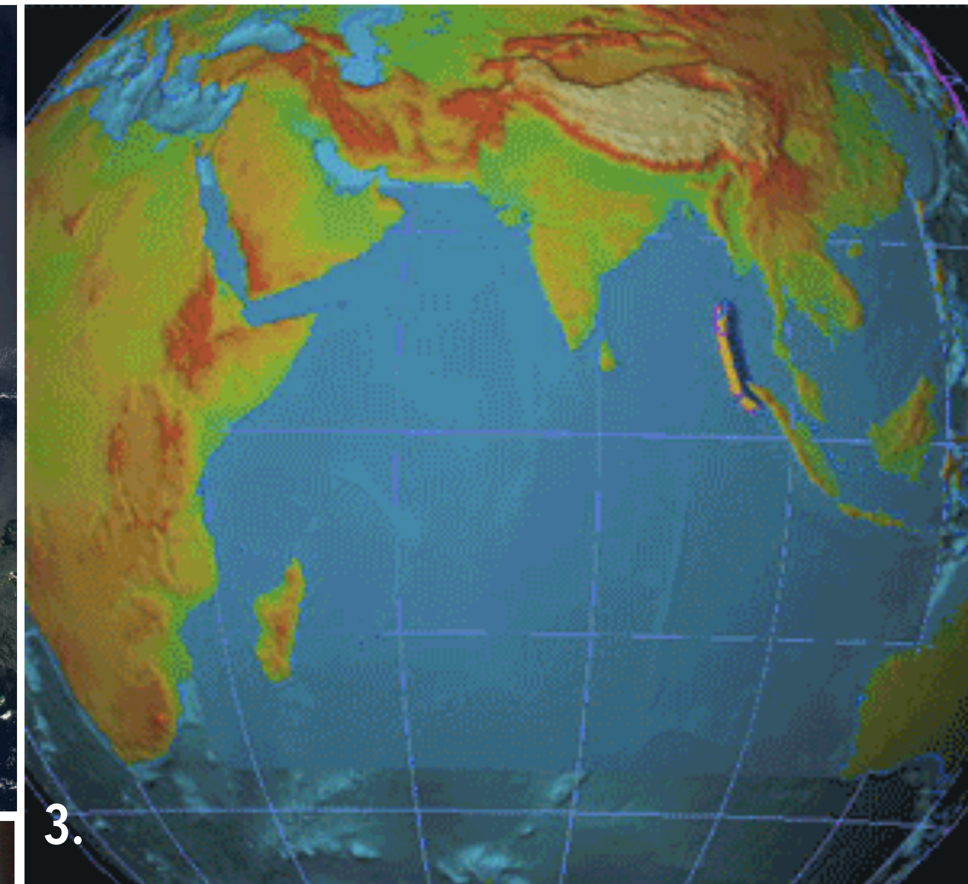
Rosa Maria Vargas Magaña
School of Mathematics, Universidad de Edimburgo
Becario Postdoctoral CONACyT

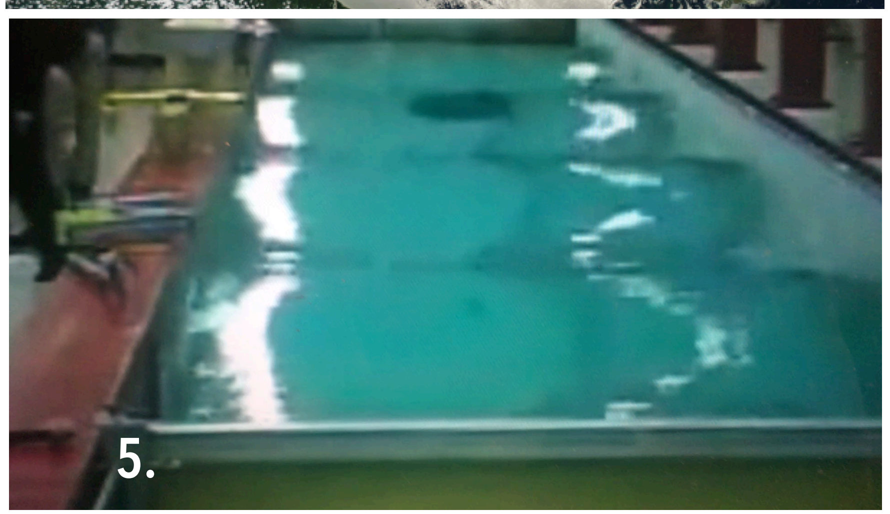
Índice de la Presentación

Las ondas **superficiales** e **internas** son ubicuas en el océano y en la atmósfera.









1. Ondas **de montaña** en la frontera interna **2. Ondas internas** en el mar de Sulu entre Filipinas y Malasia **3.** En 2004, con epicentro en el Océano Índico, al noroeste de Sumatra, Indonesia ocurrió un terremoto que propició la generación de **ondas tsunamis** en la superficie. **4. Ondas de gravedad atmosférica** que se mueven hacia el sur frente a la costa de Texas y sobre el golfo occidental de México **5. Ondas estacionarias** en el lab.

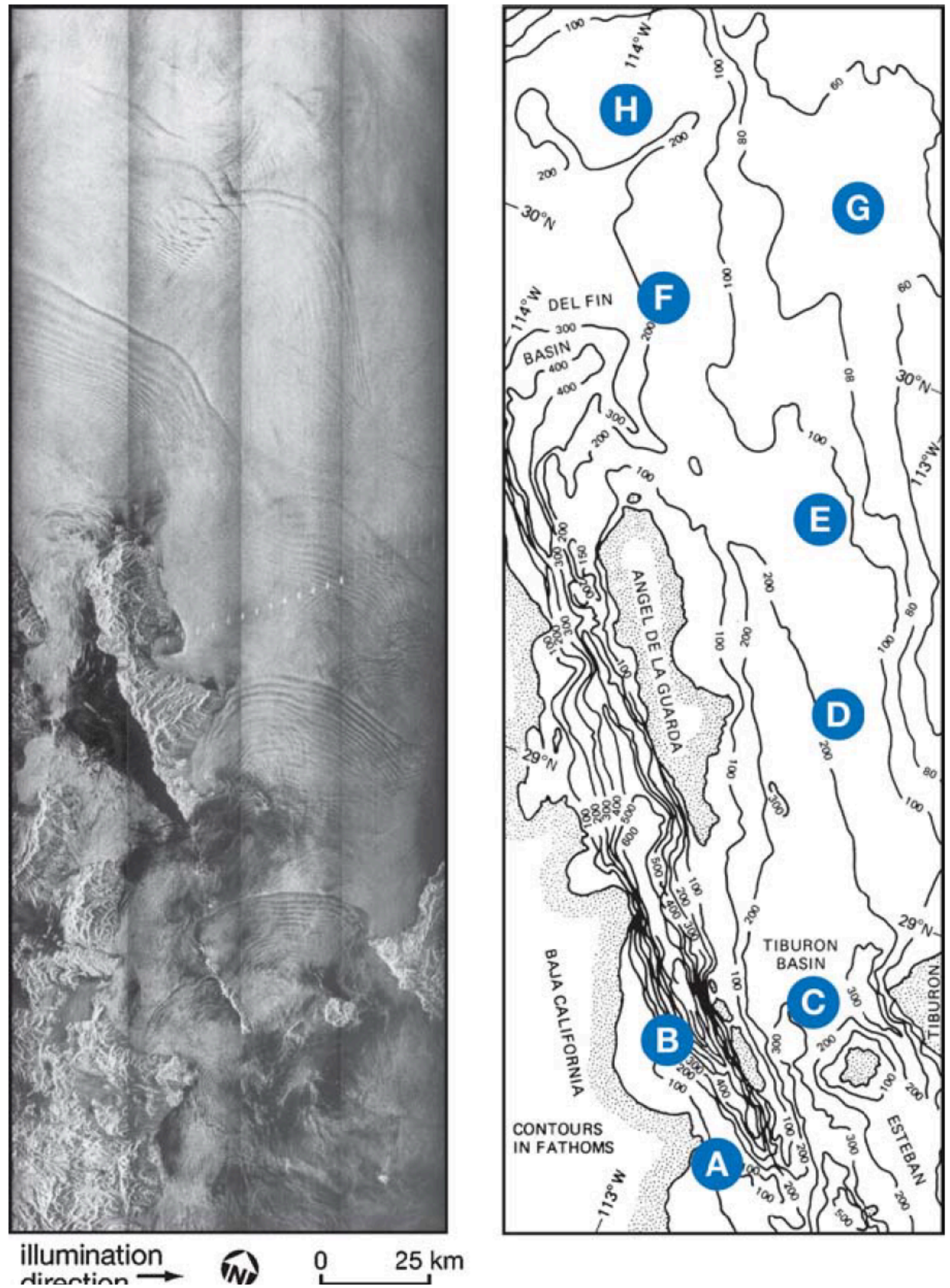
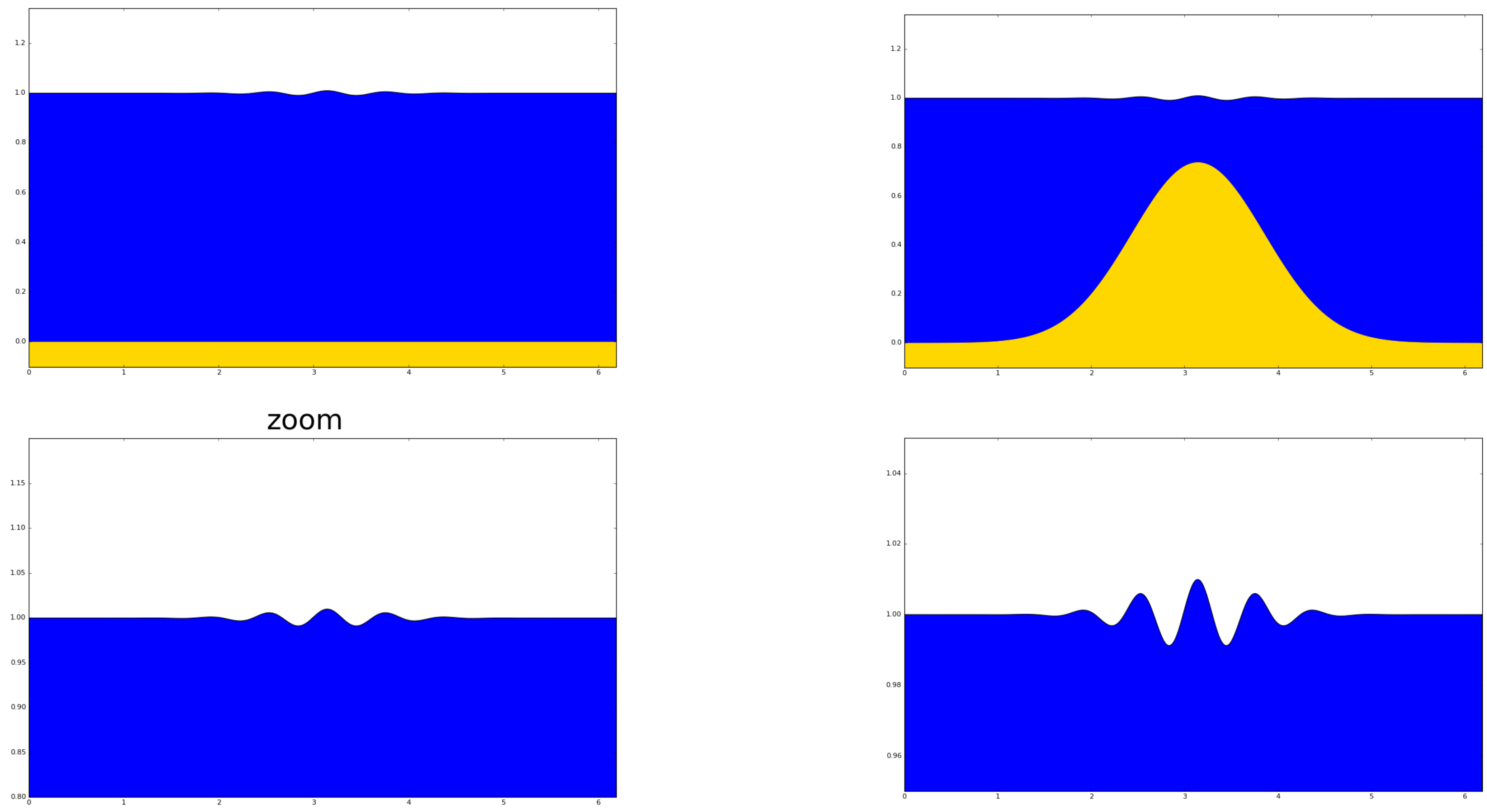


Imagen de radar de apertura sintética de una parte norte del Golfo de California de Fu & Holt (1982).



Simulaciones numéricas con el modelo *Whitham-Boussinesq* introducido en :

▸ **R. M. Vargas-Magaña,** P. Panayotaros *A Whitham-Boussinesq long-wave model for variable topography,* Wave Motion (2016)

El marco general de las **ecuaciones que gobiernan** la evolución de estos fenómenos son las **Ecuaciones de Euler en superficie libre** las cuales desde el punto de vista matemático ofrecen grandes desafíos.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial xx} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial yy} = 0 \qquad \mathcal{D}(\beta(x), \eta(x,t))$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad y = \eta(x,t) \quad \text{Condición de Cinemática}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}[(\frac{\partial \varphi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial y})^2] + g\eta = 0 \qquad y = \eta(x,t) \quad \text{Ecuación de Bernoulli}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \qquad y = -h_0 + \beta(x)$$

Para un fluido:

• Inviscido • Homogéneo • Incompresible • Irrotational ($v = \nabla\varphi$) • En un dominio simplemente disconexo.

‣ **Las condiciones de frontera en la superficie están dadas por ecuaciones fuertemente no lineales y las ecuaciones están aclopadas.**

Objetivo de Investigación

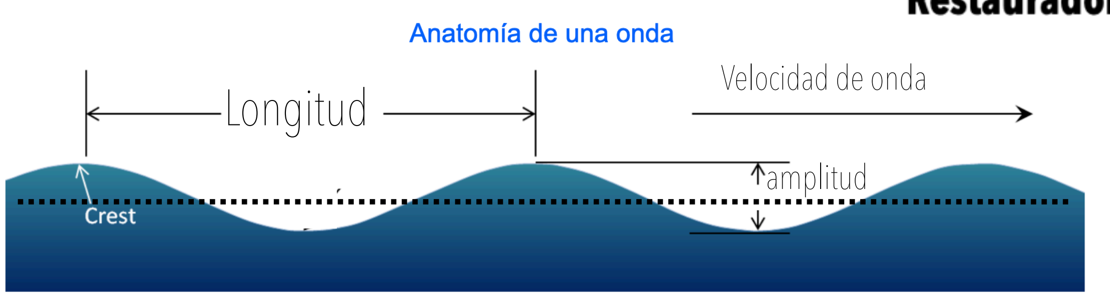
La derivación de modelos simplificados que sean matemáticamente tratables para el estudio de estos fenómenos y procesos reales que estudian las Ciencias de la Tierra.

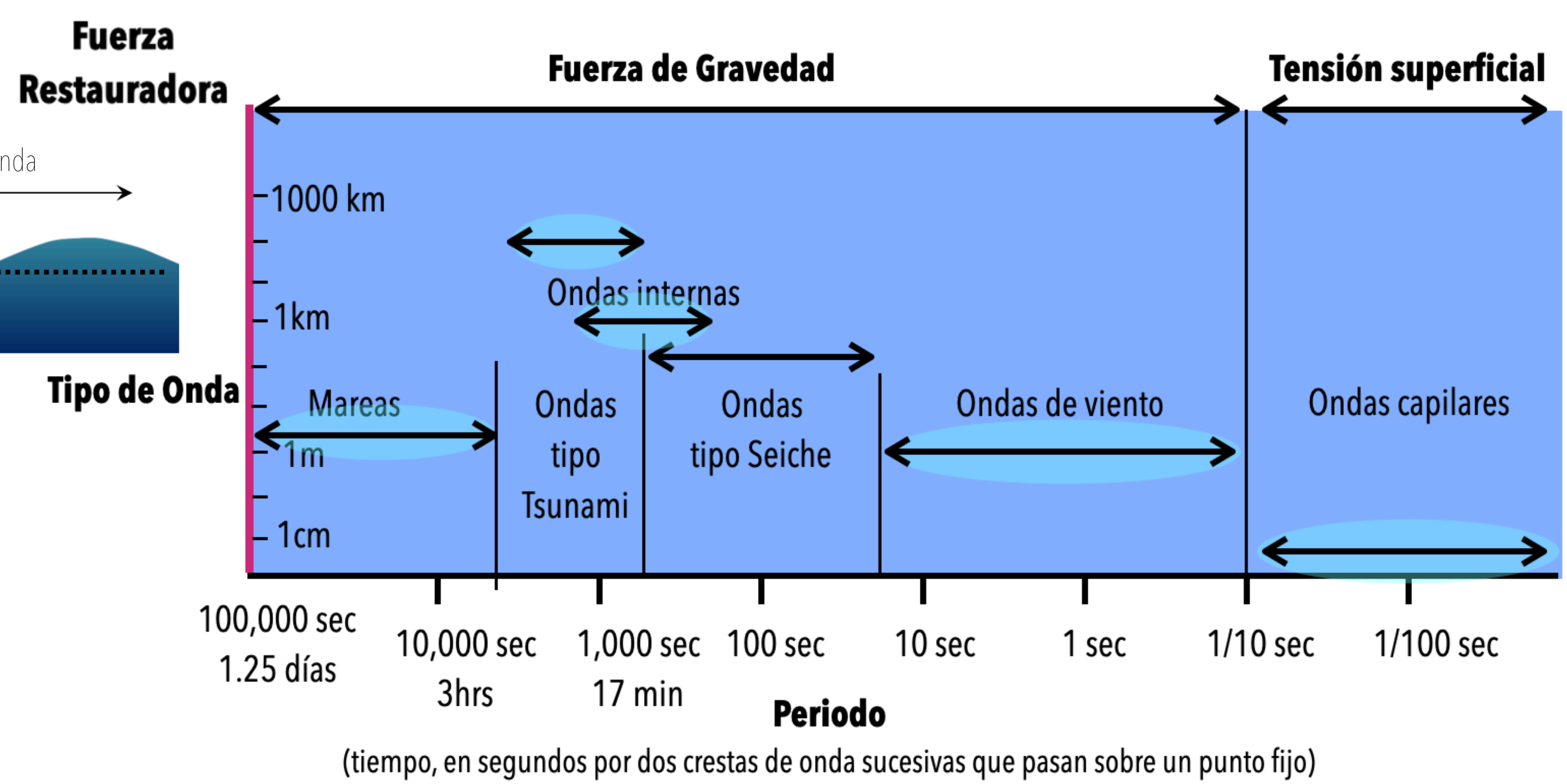
¿Cómo podemos derivar modelos simplificados**?**

Debemos determinar:

1. Las **características del fluido**: densidad, homogeneidad, viscosidad, estratificación del fluido y **si en el flujo hay vorticidad** o las velocidades están dadas por un gradiente de velocidad.

2. Las **características típicas de las ondas** de estudio: amplitud, su longitud y periodo típica.





3. Fuerzas que imperan en el fluido como gravedad, tensión superficial u otras fuerzas superficiales como el viento.

La fuerza de restauración es **la gravedad**

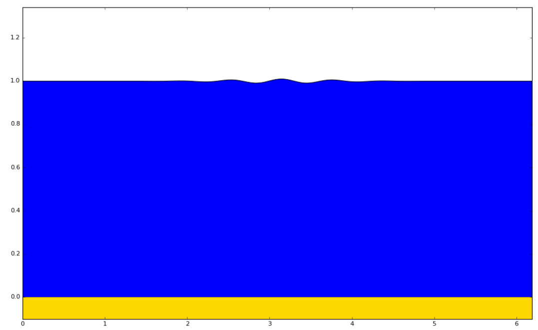
$$\omega^2 = gk \tanh(h_0 k)$$

La fuerza de restauración es **la tensión superficial**

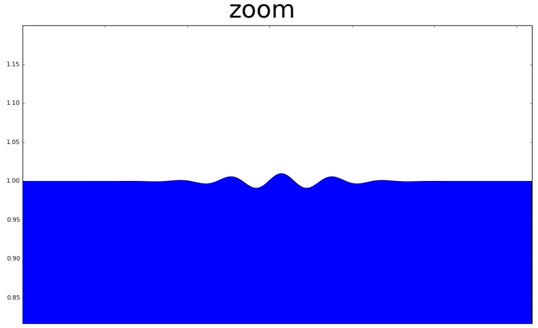
$$\omega^2 = (gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3) \tanh(kh)$$

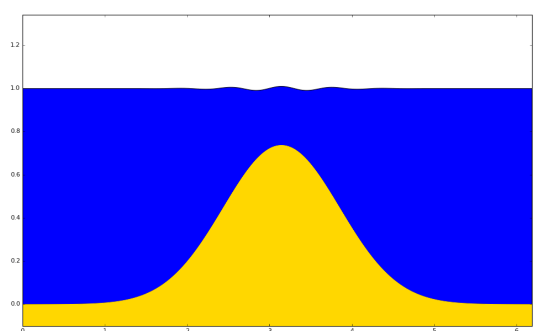
4. Dominios de fluido complicados , variaciones grandes de la profundidad, formaciones terrestres irregulares, puntos y regiones singulares en la frontera.

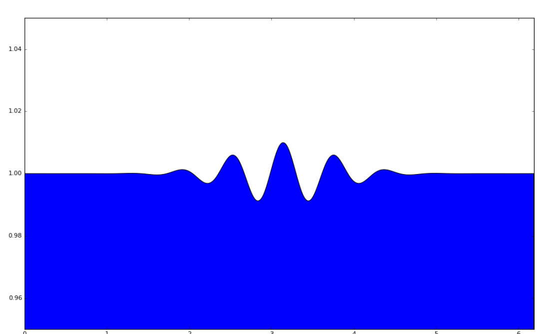
1. Variación en la velocidad de Propagación



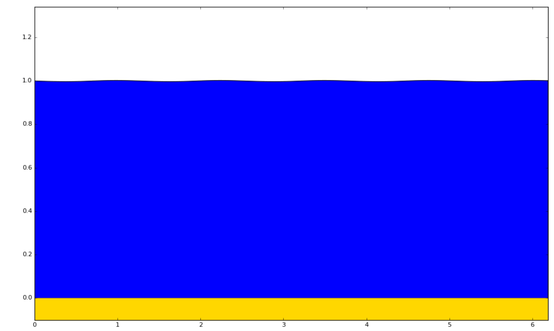
zoom



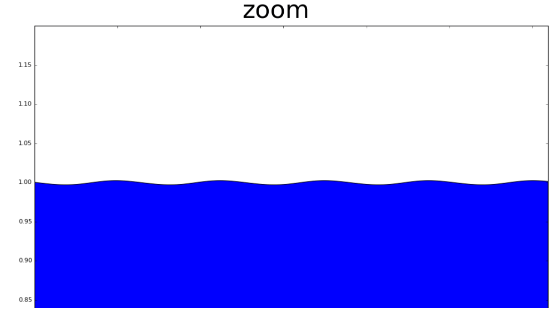


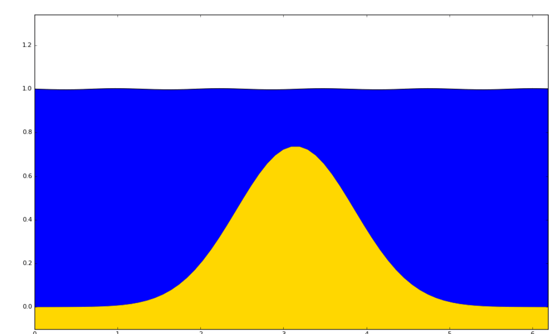


2.Destrucción de comportamientos periódicos

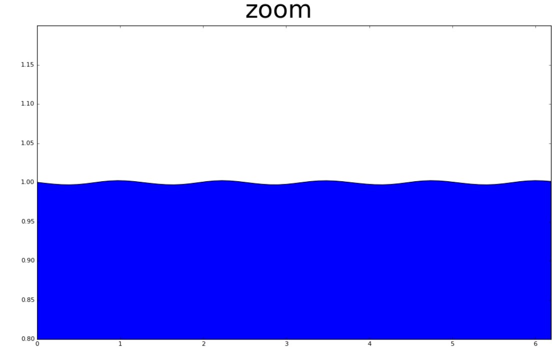


zoom





zoom

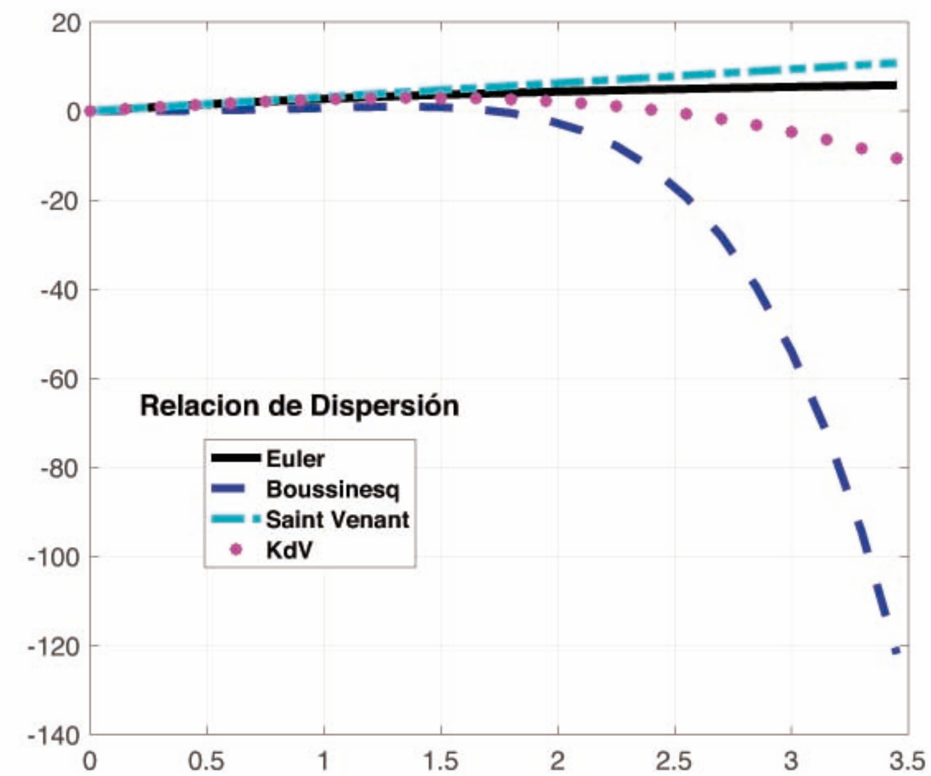


Simulaciones numéricas con el modelo *Whitham-Boussinesq* introducido en

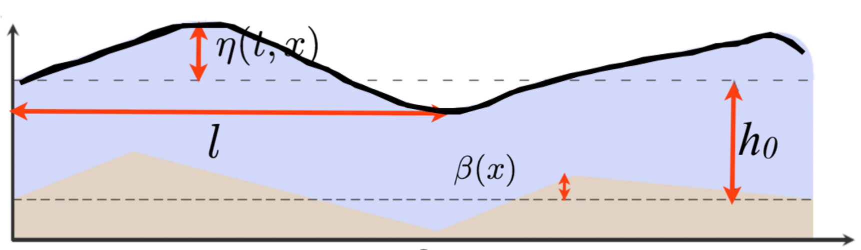
- R. M. Vargas-Magaña, P. Panayotaros ***A Whitham-Boussinesq long-wave model for variable topography,*** Wave Motion (2016)

Teoría de ondas superficiales

- **1755** Ecuaciones de Euler para un dominio con superficie libre (EE)



- **1872** Boussinesq
- **1895** Korteweg-de Vries
- **1967** Whitham
- **1968-1993** Formulación Hamiltoniana del problema de ondas en agua



$$\delta = \frac{h_0^2}{l^2} \ll 1$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{KdV} \\ \text{Boussinesq} \\ \text{Whitham-Boussinesq} \end{array} \right.$

¿Por qué es relevante la obtención de estos modelos simplificados**?**

- Gran desarrollo tecnológico en la instrumentación de medición **in situ** y en **laboratorio** de estos fenómenos.

- Enorme capacidad de cómputo y el diseño de esquemas numéricos que preservan propiedades estructurales de las ecuaciones que ha permitido integrar numéricamente las ecuaciones por tiempos prolongados.

- Se han registrado y documentado los **efectos no lineales** de la combinación de la dispersión de las ondas y la topografía y las fuerzas de restauración que se manifiestan ante la **propagación de ondas por** periodos prolongados del tiempo.

- Se han observado numéricamente **ondas coherentes estables e inestables** y los **efectos de radiación, resonancia, disipación, vorticidad, enfoque y desenfoque** de las ondas, tren de ondas periódicos, frentes de ondas etc.

Desafíos en la modelación de ondas

1. La **limitación de algunos modelos** utilizados en la actualidad en varias disciplinas para la descripción de estos fenómenos.

2. La necesidad de derivación de modelos con **gran estructura que sean: matemáticamente tratables**, **numéricamente integrales y que logren capturar con el nivel de detalle cualitativo y cuantitativo los efectos no lineales que se manifiestan en la propagación de las ondas.**

3. La relevancia de modelos que puedan ser **extendibles a otras dimensiones** y a **dominios con varios estratos.**

Objetivos Específicos

Parte I: Ondas superficiales en el agua: Retos en la teoría matemática y aplicaciones en la oceanografía y dinámica costera.

Parte II: Ondas internas en fluidos estratificados: Extensión de los modelos débilmente no lineales para ondas de superficie a fluidos estratificados para el estudio de ondas internas que describen fenómenos y procesos de la Tierra.

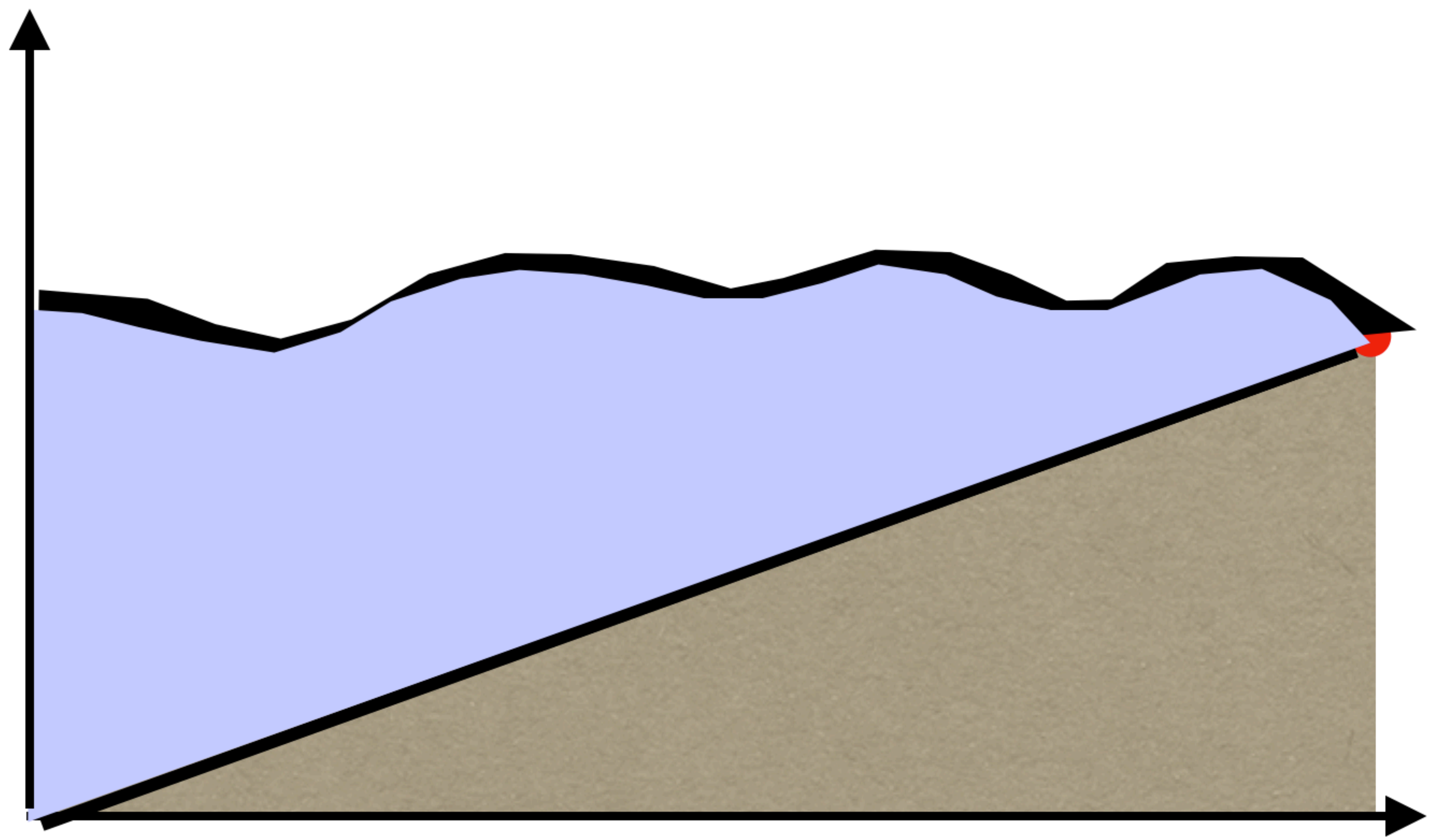
Problemas de **Investigación**

Problema I: Modelo de propagación de ondas en dominios con planos inclinados.

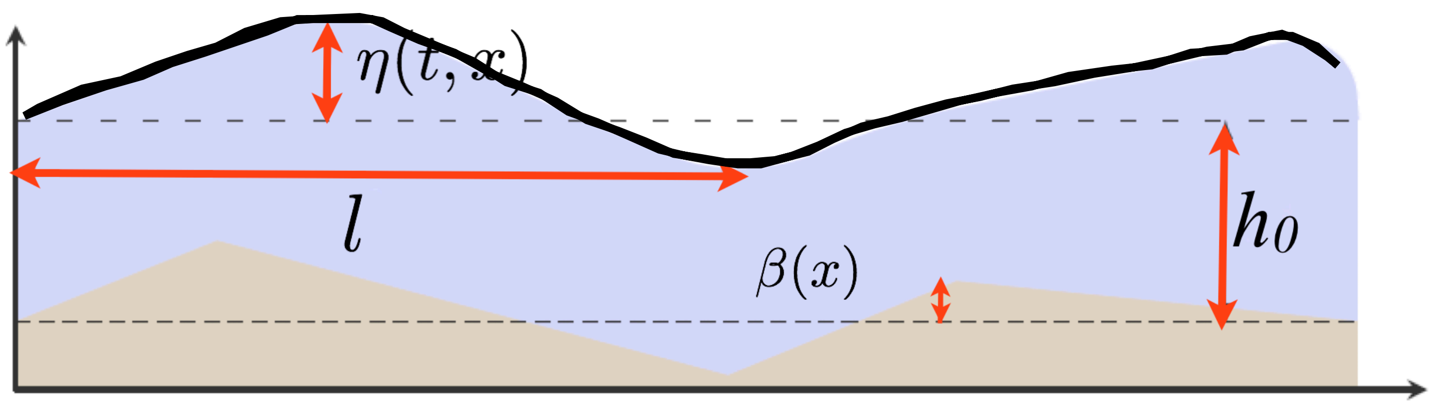
Problema II: Ondas de choque dispersivas resonantes regidas por ecuaciones bidireccionales de Whitham-Boussinesq.

Problema III: Planteamiento, discretización e implementación de modelos de ondas en fluidos estratificados: para las ecuación del tipo KdV, Boussinesq y Whitham-Boussinesq

Problema 1: Modelo de propagación de ondas en dominios con planos inclinados.



Formulación **Hamiltoniana**



$$\delta = \frac{h_0^2}{l^2} \ll 1$$

- $\xi(x,t)$ Potencial en la superficie libre

Zakharov (1968) plantea las ecuaciones de evolución en la forma de un sistema Hamiltoniano en las variables canónicas $(\eta(x), \xi(x))$ **con** $\xi(x,t) = \varphi(x, \eta(x,t), t)$

$$\partial_t \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_\eta H \\ \delta_\xi H \end{pmatrix} = J\delta H,$$

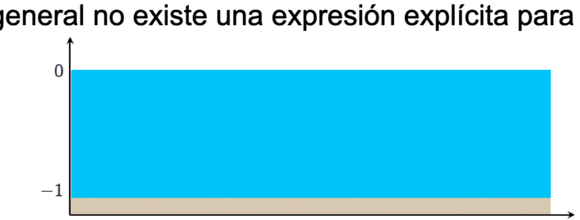
V.E. Zakharov (1968), J.W. Miles, (1977)

Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\xi G(\beta,\eta)\xi + g\eta^2) dx$$

W. Craig and C. Sulem (1993)

- En general no existe una expresión explícita para este operador



- SÓLO en este caso es posible obtener una expresión explícita del operador DN

$$[G(0,0)] : \quad \xi \longmapsto D\tanh(D)\xi$$

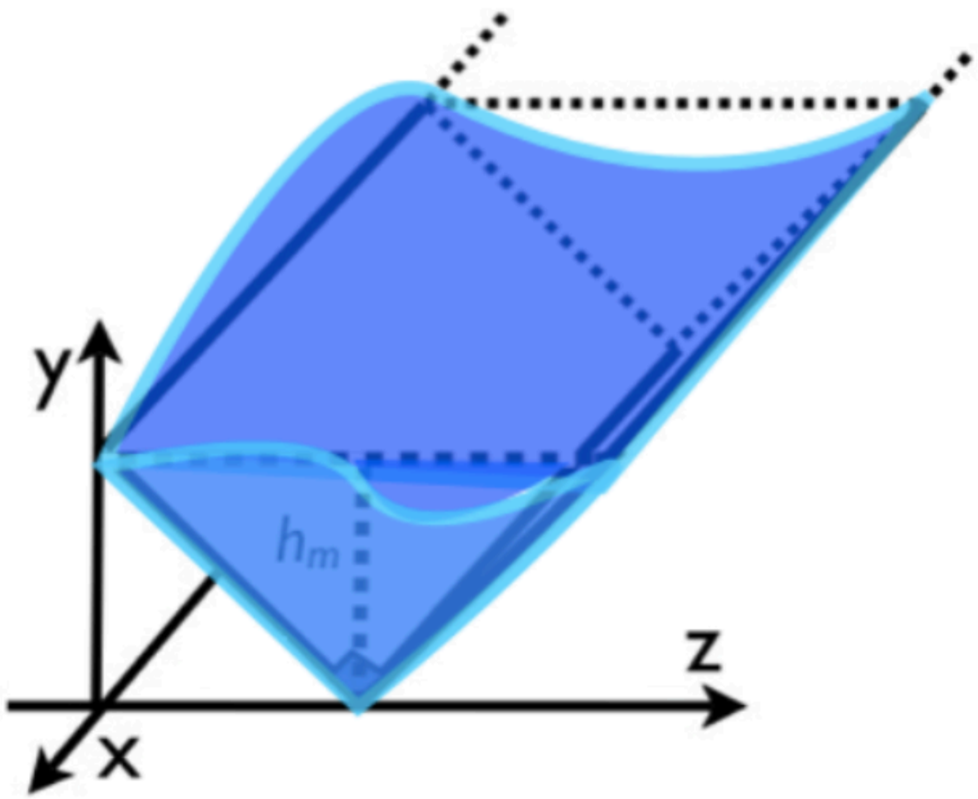
Donde el operador D está definido como: $D = -i\partial_x$

$$\xi(x) \longmapsto \hat{\xi}(\kappa) \longmapsto \kappa\tanh(h_0\kappa)\hat{\xi}(\kappa) \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \kappa\tanh(h_0\kappa)\hat{\xi}(\kappa)e^{i\kappa x}d\kappa := [D\tanh(h_0 D)]\xi$$

$$G_{\mathcal{A}_2} = Sym\left(\frac{\tilde{D}}{\sqrt{\epsilon}}\tanh(\sqrt{\epsilon}(-1+\tilde{\beta}(x))\tilde{D})\right) + \epsilon\tilde{D}\tilde{\eta}\tilde{D}$$

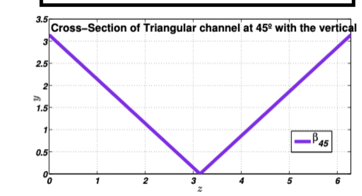
R. M. Vargas-Magaña, P. Panayotaros
A Whitham-Boussinesq long-wave model for variable topography, Wave Motion (2016)

Modos the oscilación transversal y longitudinales en canales con sección transversal constante y acotada

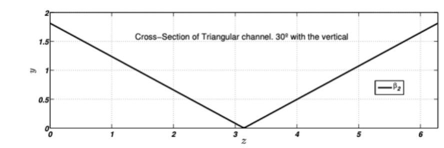


THERE ARE EXACT SOLUTIONS

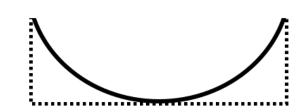
Kirchhoff (1880)
Lamb (1932)



Greenhill (1887),
Macdonald (1893),
Packham (1980),
Groves (1994)



Evans, Linton (1993)

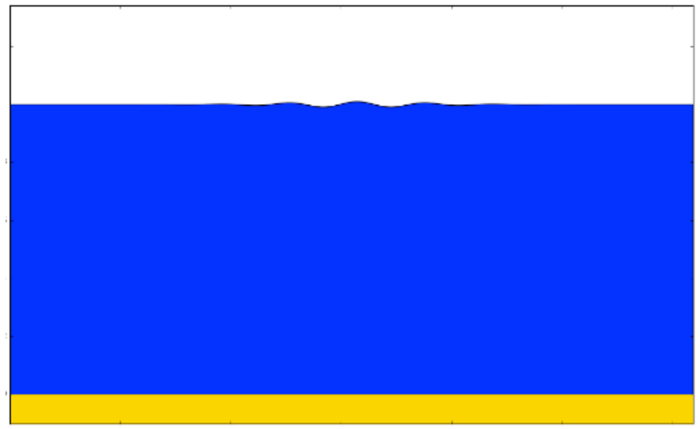


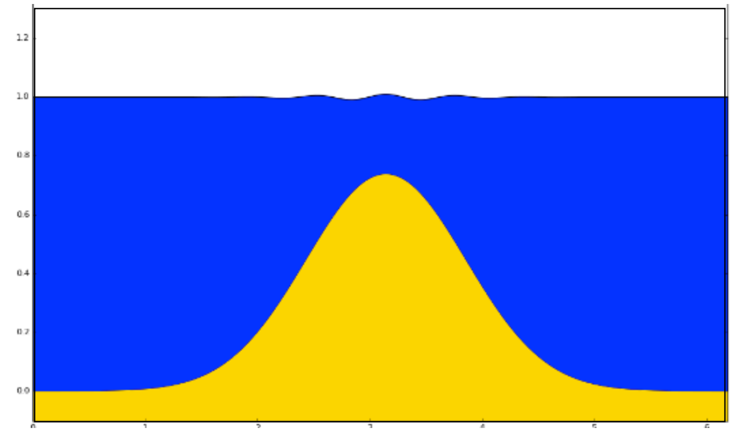
$$\phi(x, y, z, t) = \psi(y, z)\cos(\omega t),$$ **2D wave**

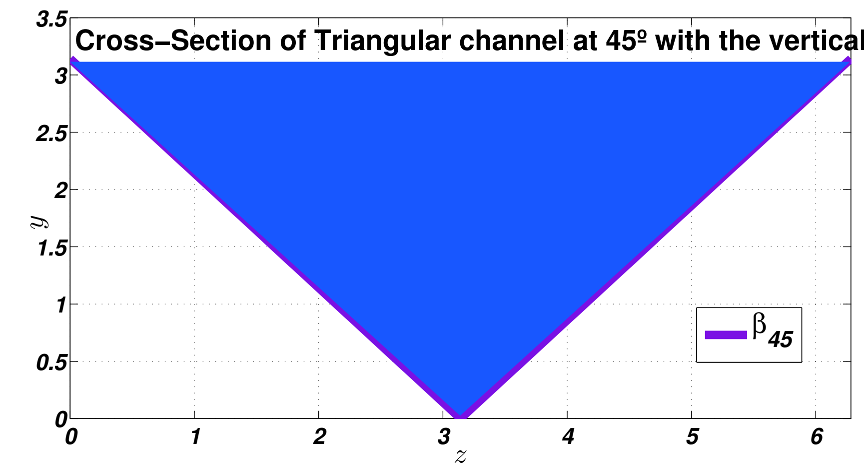
$$\phi(x, y, z, t) = \psi(y, z)\cos(\kappa x - \omega t),$$ **3D wave**

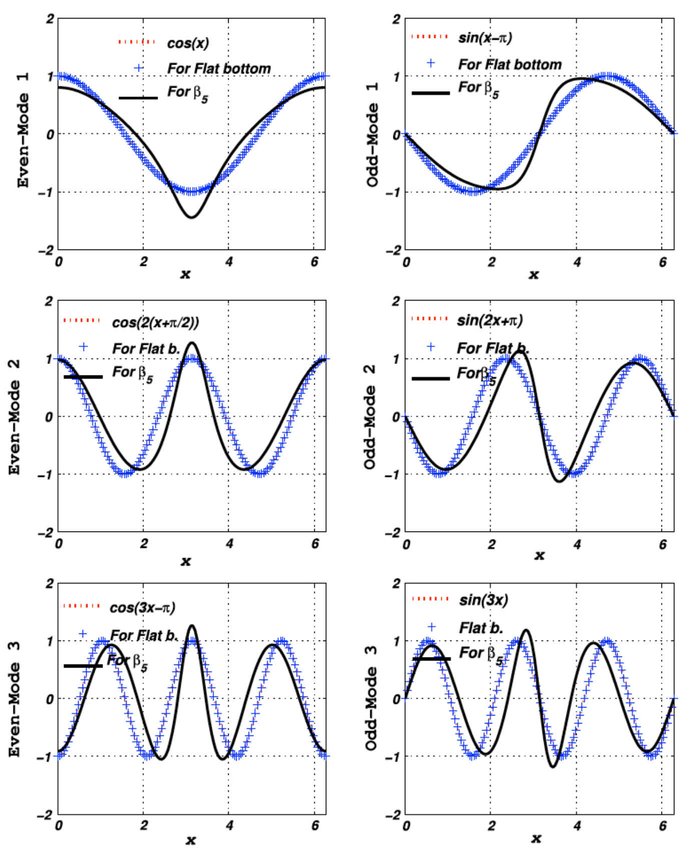
► **R. M. Vargas-Magaña,** P. Panayotaros, A. A. Minzoni
Linear Modes for Channels of Constant Cross-Section and Approximate Dirichlet–Neumann Operators
Water Waves (2019)

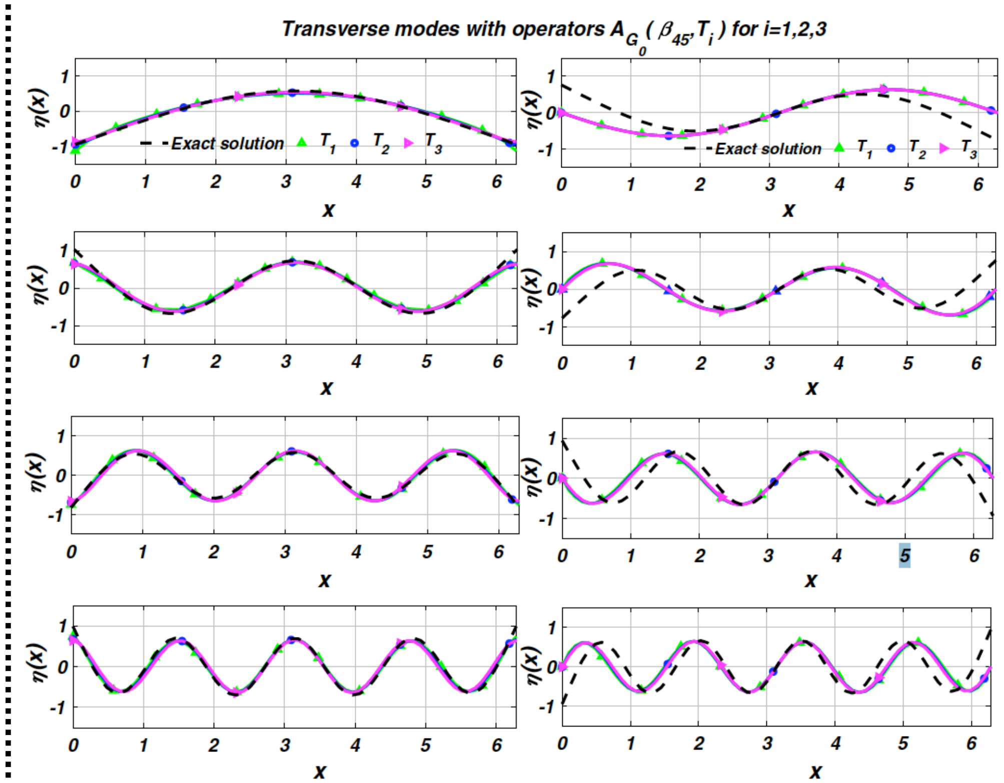
Los modos normales para cada dominio del fluido.









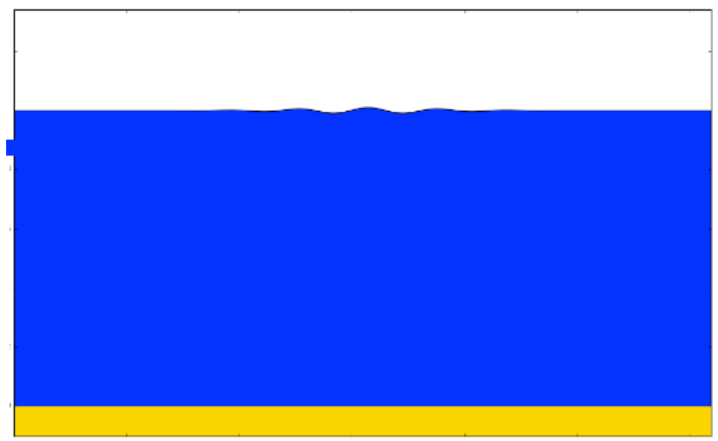


▸ **R. M. Vargas-Magaña,** P. Panayotaros
A Whitham-Boussinesq long-wave model for variable topography, Wave Motion (2016)

▸**R. M. Vargas-Magaña,** P. Panayotaros, A. A. Minzoni
Linear Modes for Channels of Constant Cross-Section and Approximate Dirichlet–Neumann Operators Water Waves (2019)

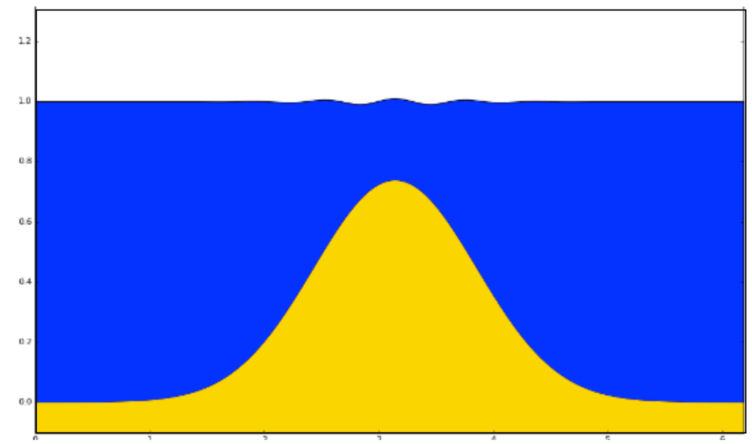
$$H = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\xi G(\beta,\eta)\xi + g\eta^2)dx$$

Profundidad Constante



$$G_{\mathcal{A}_0} = \frac{\tilde{D}}{\sqrt{\epsilon}}\tanh(h_0\sqrt{\epsilon}\tilde{D}) + \epsilon\tilde{D}\tilde{\eta}\tilde{D}$$

Grandes Variaciones en la Profundidad

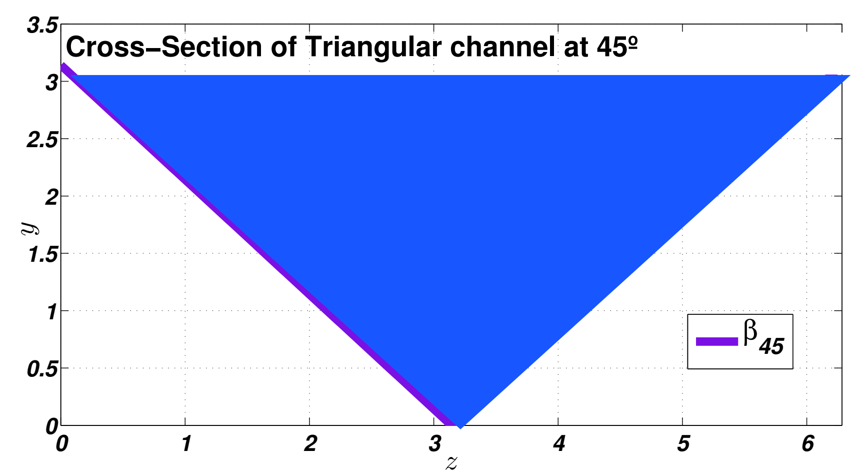


$$G_{\mathcal{A}_2} = Sym(\frac{\tilde{D}}{\sqrt{\epsilon}}\tanh(\sqrt{\epsilon}(-1+\tilde{\beta}(x))\tilde{D})) + \epsilon\tilde{D}\tilde{\eta}\tilde{D}$$

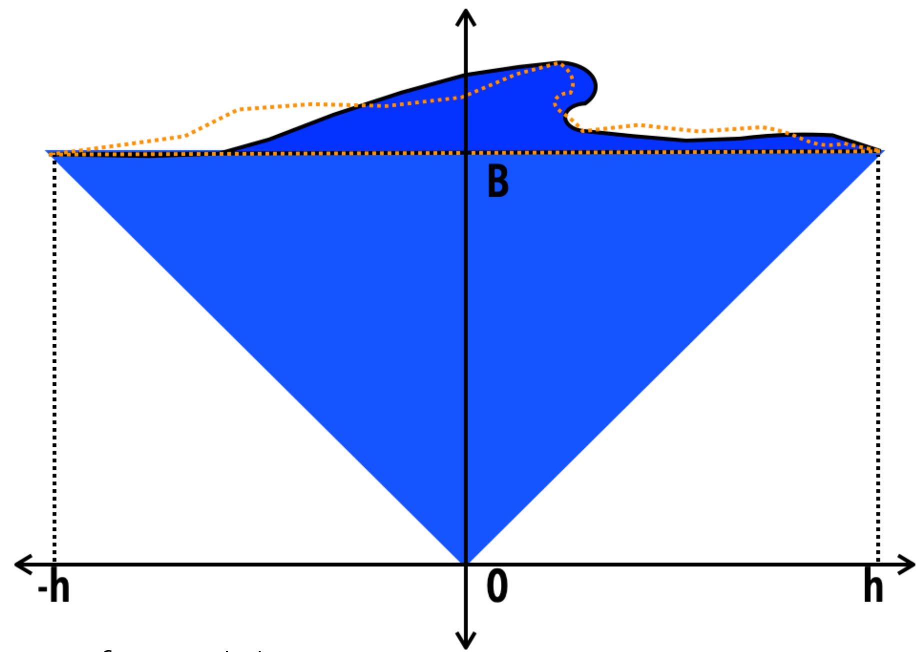
$$\begin{cases} \partial_t \hat{\eta}_k = \dfrac{\partial H}{\partial \hat{\xi}_k^*} \\ \partial_t \hat{\xi}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial \hat{\eta}_k^*} \end{cases}, \quad k \in J_M, \quad \text{with} \quad J_M = [1,...,M]\,.$$

Desafío: la derivación de un modelo débilmente no lineal y su formulación en su forma espectral para la descripción de la superficie libre.

Planos inclinadas



Estrategia para la derivación de un modelo espectral



1. Parametrización de la superficie libre.

$$[X(s,t), Y(s,t)] = \mathcal{G}^{\epsilon}(s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad s \in [-h, h]$$

2. Resulta de aplicar un campo de velocidades de la superficie en reposo por un tiempo t. De tal forma que la curva esta dada por la integración en el tiempo del campo de velocidades.

$$\frac{dr}{d\tau} = \nabla V(r,t), \quad r \in \mathcal{W}$$

3. Y podemos aproximarla a primer orden por una sencilla regla de aproximación de Euler

$$\mathcal{G}^{\epsilon}(s,t) = [s, B] + \epsilon[\partial_x V([s,B],t), \partial_y V([s,B],t)] + O(\epsilon^2)$$

Estrategia para la derivación de un modelo espectral

4. Las velocidad del problema están dadas por un potencial que es armónico, esto es, podemos expresarlas en términos de los modos normales del problema los cuales forman una base para el problema y satisfacen las condiciones del problema en este dominio triangular.

$$\phi(\cdot, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\Phi_n(\cdot)$$

$$\partial_t \mathcal{G}^{\epsilon}(s,t) = \nabla\phi\left(\mathcal{G}^{\epsilon}(s,t), t\right) = \nabla\phi\left([s,B] + O(\epsilon)\right) = \nabla\phi([s,B],t) + O(\epsilon).$$

$$\epsilon\partial_t\tilde{\phi}([s,B],t) + g\epsilon\partial_y V([s,B],t) + O(\epsilon^2) = 0$$

Trabajo en colaboración con el Dr. P. Panayotaros en proceso,

- **R. M. Vargas-Magaña** and P. Panayotaros Water wave problem with incline walls.

Desafíos

- Modelo aproximado a primer orden adecuado para planos inclinados que permite el doblamiento de la onda de superficie.

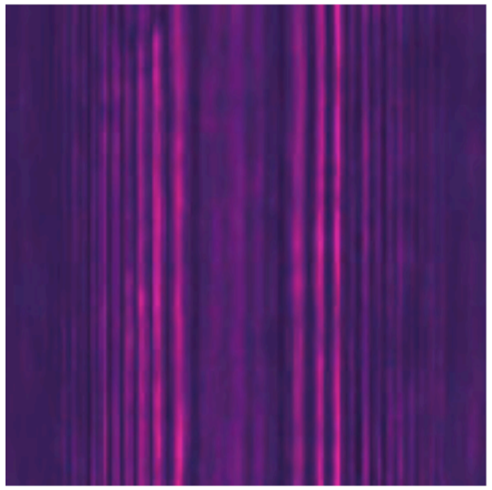
- Es preciso encontrar una representación explícita con pocos modos para la implementación numérica de las ecuaciones de evolución

- Explorar la rotación de los modos normales para obtener un modelo adecuado para areas costeras con inclinación arbitraria

- Realizar pruebas experimentales de ondas tipo tsunami y contrastar con otros modelos de onda larga débilmente no lineles.

Problema II: Ondas de choque dispersivas resonantes regidas por ecuaciones bidireccionales de Whitham-Boussinesq.





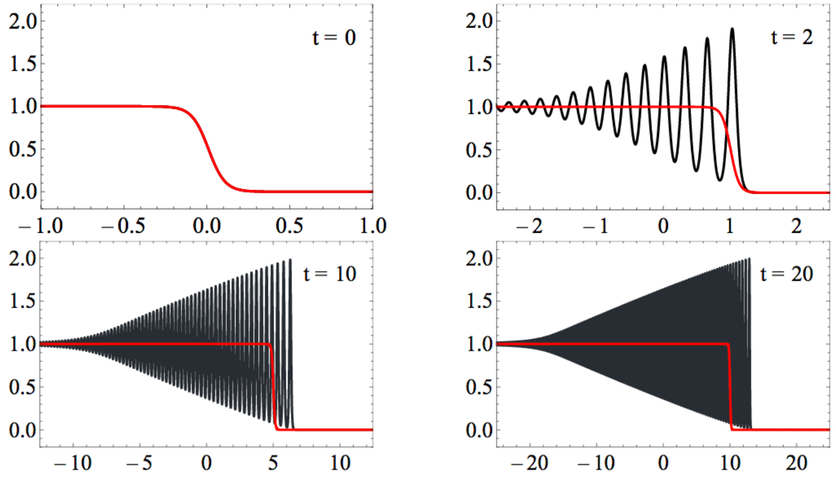

En la atmósfera a) Nube de gloria por la mañana. b) Ondas de Montaña c) Imagen del conjunto de salida de un cristal foto refractivo desenfocado. d) Salto oscilatorio en un río en Turnagain Arm, Alaska.

¿Qué es una onda de choque dispersiva?

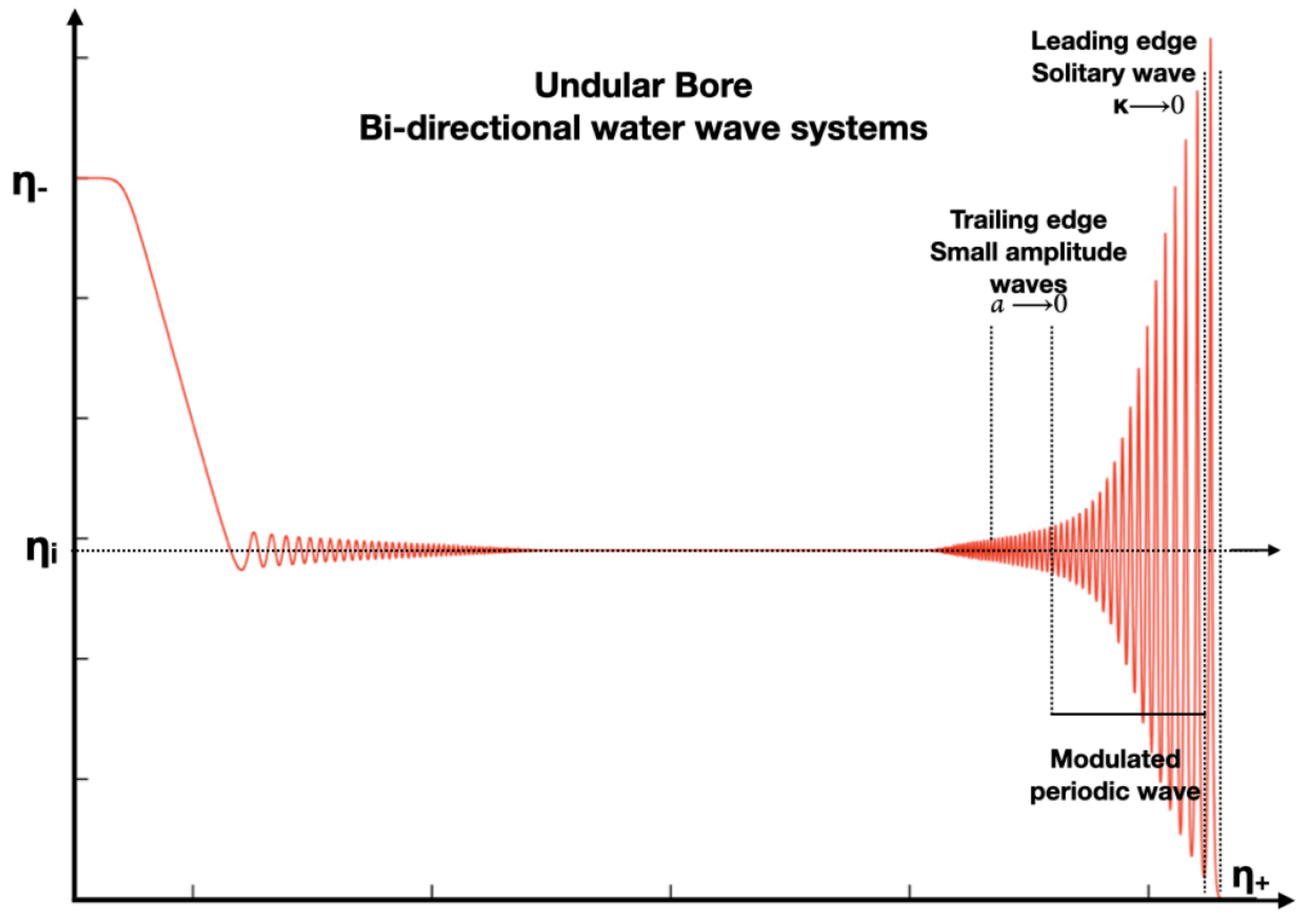
Un DSW es la resolución dispersiva de un frente de onda pronunciado.

$$u_t + uu_x = 0$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$



Anatomía de un DSW y cantidades macroscópicas



Por medio del método de G. El y colaboradores es posible medir estas cantidades macroscópicas de las ondas de choque dispersivas.

- ► Amplitud de la onda solitaria líder
- ► Velocidad de la onda solitaria líder
- ► El número de onda del tren de ondas armónico

Métodos analíticos existentes para determinar analíticamente las propiedades macroscópicas de las ondas de choque dispersivas

✦ Teoría de modulación

✦ Método de Ajuste de Ondas de choque dispersivas

►Las ecuaciones de modulación son estrictamente hiperbólicas, no lineales y de ellas pueden plantearse sistemas reducidos para límites de onda corta (ondas solitarias) y lineales (límite de tren de ondas armónico).

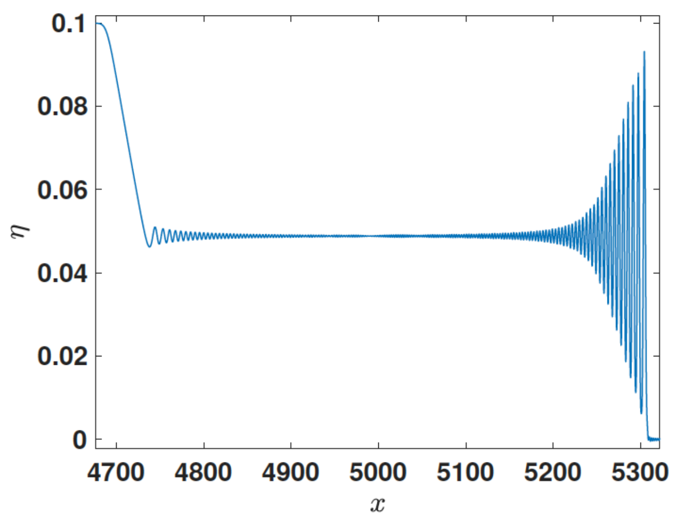
► Para sistemas de ecuaciones no integrales y dispersivos, es difícil encontrar la solución de onda de choque de las ecuaciones de modulación hiperbólica.

►La teoría matemática para medir analíticamente estas cantidades está desarrollada para modelos que satisfacen cierto régimen físico y no se había probado su validez en sistemas completamente no lineales como en las ecuaciones de Euler para superficie libre en el marco de ondas en agua.

Modelos de ondas en agua débilmente no lineales *VS* Completamente no lineales

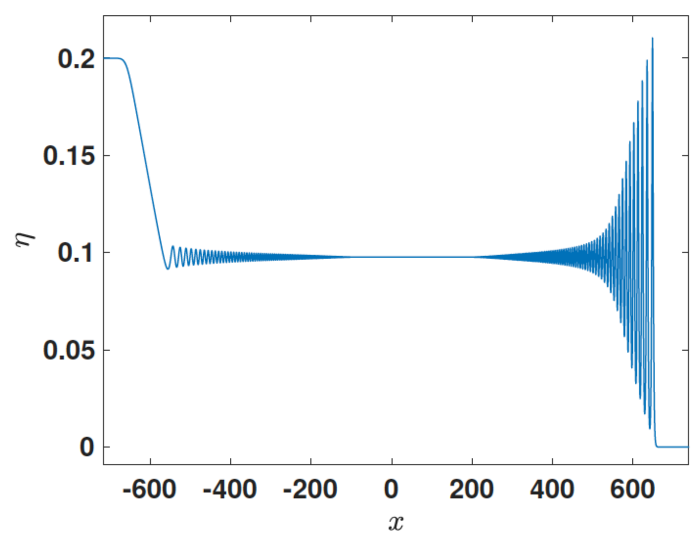
Modelo Boussinesq Estándar:

$$\begin{aligned} \eta_t &= -u_x - (\eta u)_x, \\ u_t &= -u u_x - \eta_x - \frac{1}{3}\eta_{xxx}. \end{aligned}$$



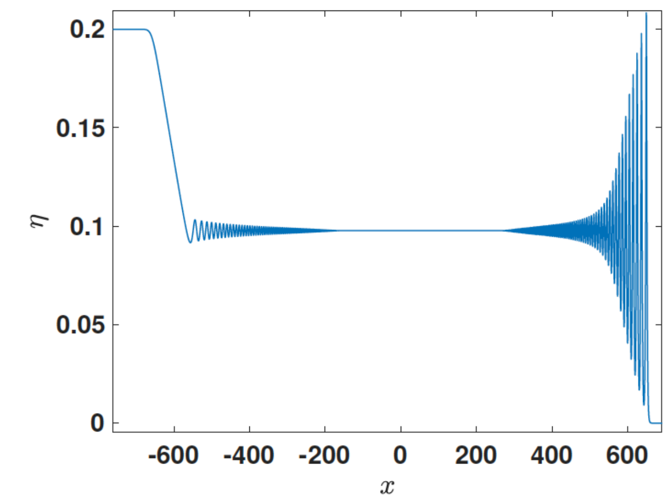
Modelo Boussinesq con relación de dispersion completa:

$$\begin{aligned} \eta_t &= -u_x - (\eta u)_x, \\ u_t &= -u u_x - \partial_x \left(\left[\frac{\tanh D}{D} \right] \eta \right) \end{aligned}$$



Modelo Whitham-Boussinesq:

$$\begin{aligned} \eta_t &= -\partial_x \left(\left[\frac{\tanh D}{D} \right] u \right) - (\eta u)_x \\ u_t &= -\eta_x - u u_x. \end{aligned}$$



Ecuaciones de Euler en superficie libre:

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\xi G(0, \eta)\xi + g\eta^2) dx$$

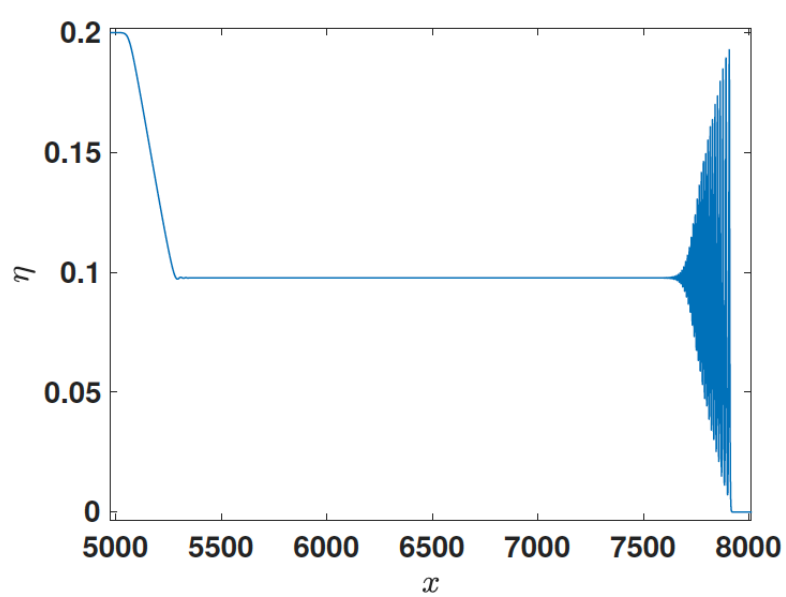
- Expansión de Taylor del operador $G(0, \eta)$:

$$G(0,\eta) = G_0(0,\eta) + G_1(0,\eta) + G_2(0,\eta) +, \ldots$$

  - $G_j(0,\eta)$ son operadores homogéneos de grado j en η.

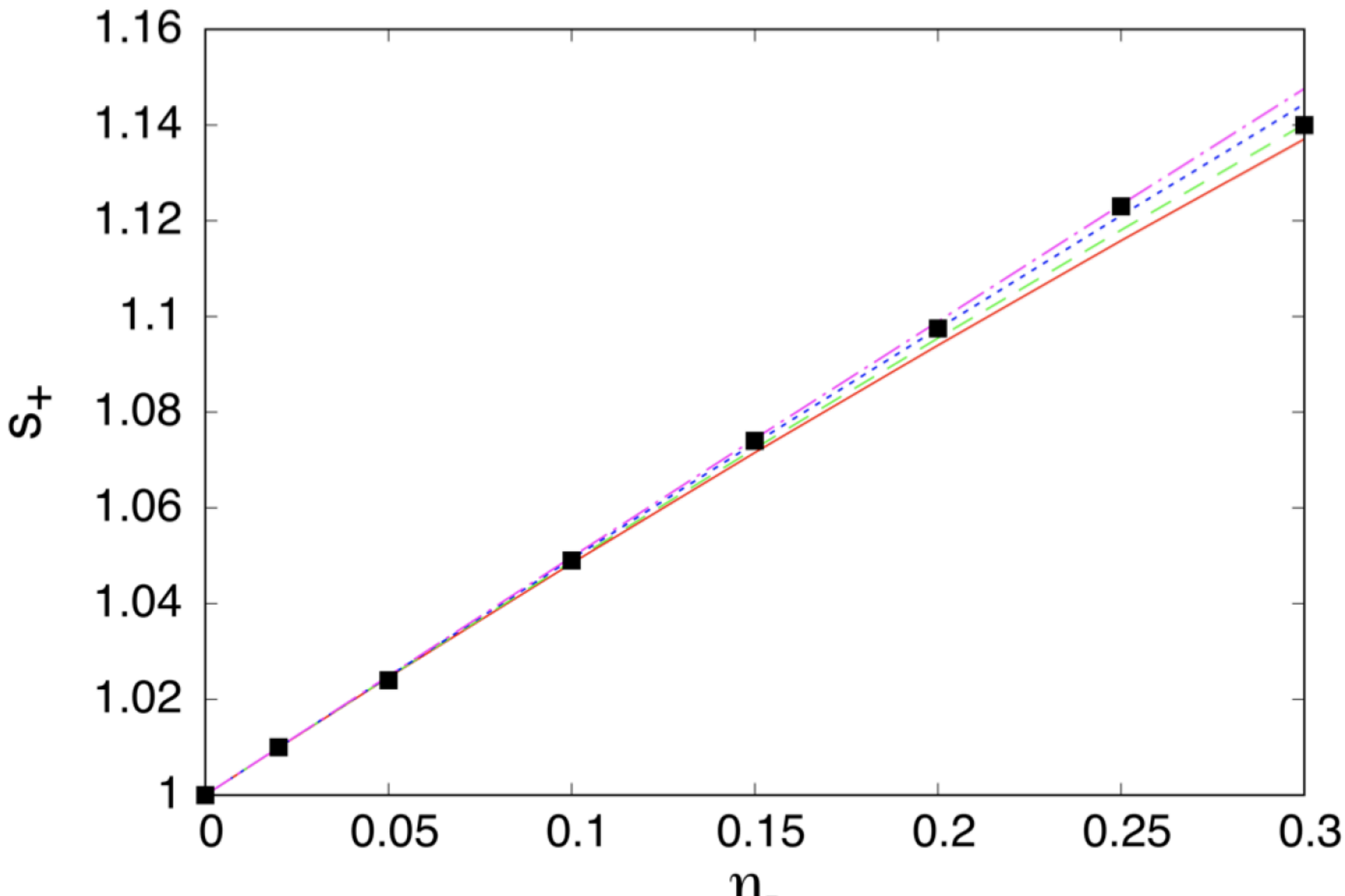
$$\begin{aligned} G_0(0,\eta) &= D \tanh(h_0 D) \\ G_1(0,\eta) &= D\eta D - G_0 \eta G_0, \\ G_2(0,\eta) &= \frac{1}{2}(G_0 D \eta^2 D - D^2 \eta^2 G_0 - 2G_0 \eta G_1), \end{aligned}$$

con $D = -i\partial_x$



► **R. M. Vargas-Magaña**, N. Smyth and T. Marchant
Numerical and analytical study of undular bores governed by the full water wave equations and bi-directional Whitham-Boussinesq equations ***IN PREP 2020***

Problema IV: Velocidad de la onda solitaria líder de la onda de choque dispersiva para distintos modelos débilmente no lineales y las ecuaciones completas de Euler



Modelo Whitham-Boussinesq; Modelo Boussinesq con relación de dispersion completa;

Modelo Boussinesq Estándar; Ecuaciones de Euler en superficie libre

- El estudio del modelo Whitham-Boussinesq que considera la relación de dispersión completa captura los efectos de onda corta lo cual fue fundamental para obtener la inestabilidad de Benjamin-Feir que se observa en las Ecuaciones de Euler.
- Estamos resolviendo las ecuaciones de ondas de agua numéricamente usando un método pseudo-espectral basado en la formulación Hamiltoniana.
- Un resultado importante que obtuvimos en la investigación postdoctoral es que la ecuación de Whitham-Boussinesq es suficiente para describir los orificios y no necesita las ecuaciones de onda de agua completas.

DSWs en modelo W-B fondo plano vs DSW en modelo W-B con tensión superficial

Desafíos

Whitham-Boussinesq fondo plano

$$\eta_t = -\partial_x\left(\left[\frac{\tanh D}{D}\right]u\right) - (\eta u)_x$$
$$u_t = -\eta_x - uu_x.$$

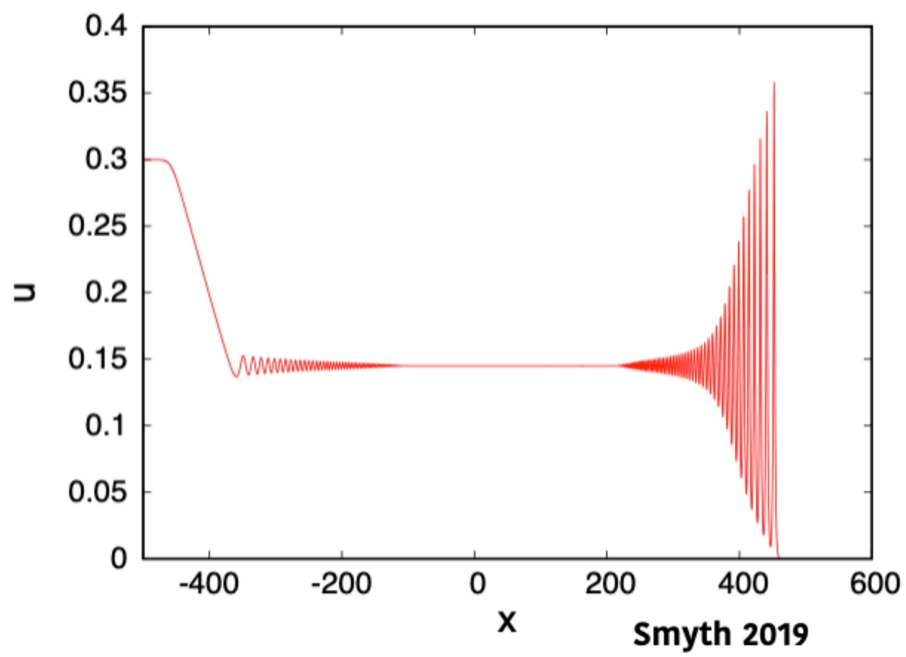


Fig. Undular bore del modelo **Whitham-Boussinesq fondo plano** η=0 and u_0=0.

Whitham-Boussinesq con tensión superficial

$$u_t = -\eta_x - uu_x + \alpha\eta_{xxx},$$
$$\eta_t = -\partial_x([\frac{\tanh D}{D}]u) - (\eta u)_x \qquad \alpha = \frac{T}{\rho}.$$

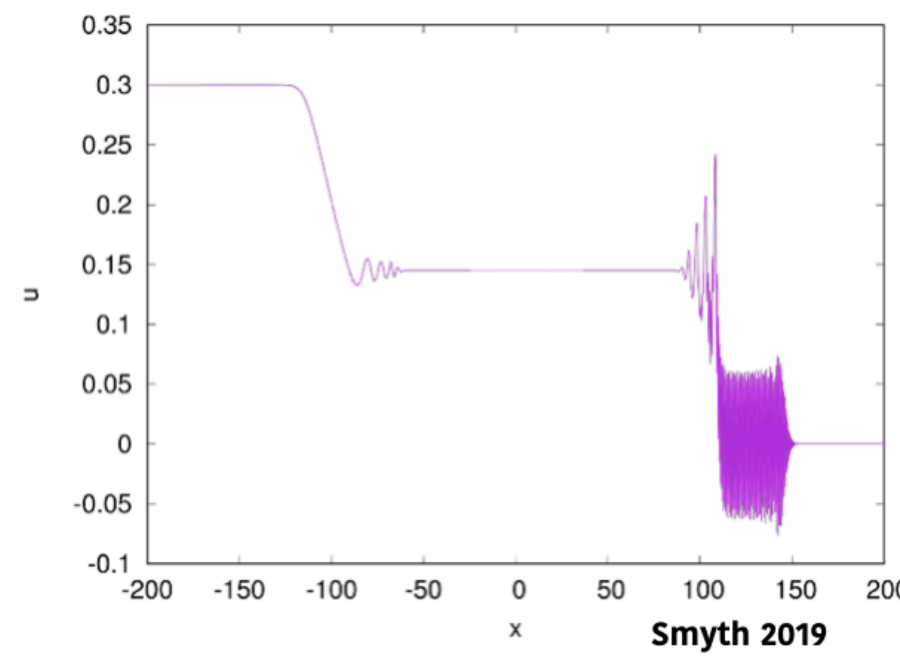
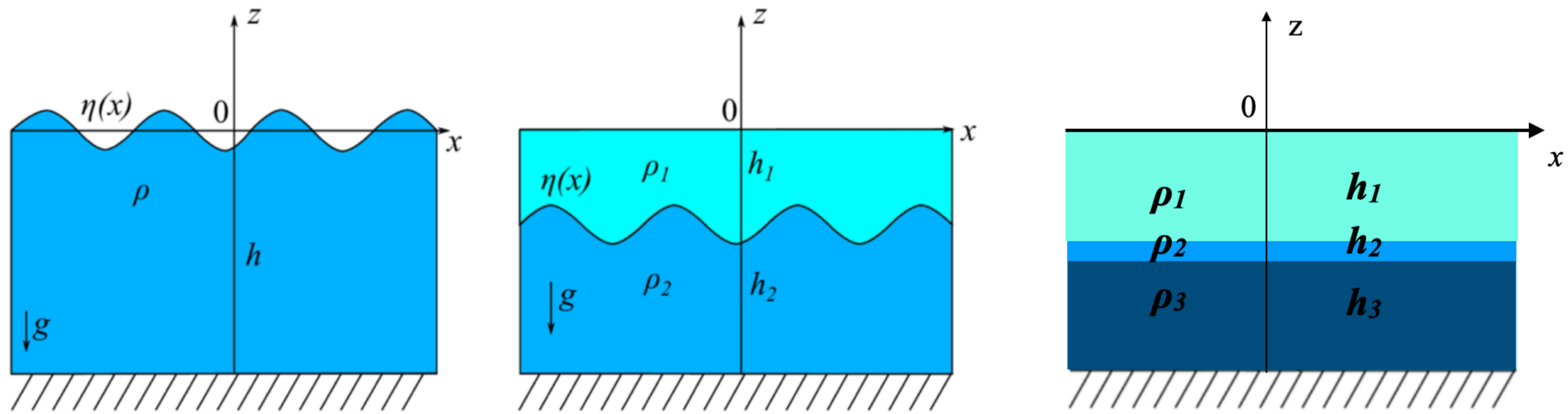


Fig. Undular bore del modelo **Whitham-Boussinesq** con **stensión superficial** y fondo plano T=0 and u_0=0.

Problema V: Planteamiento, Discretización e Implementación de modelos de ondas en fluidos estratificados: para las ecuación del tipo KdV, del tipo Boussinesq y del tipo Whitha-Boussinesq



a) b) c)

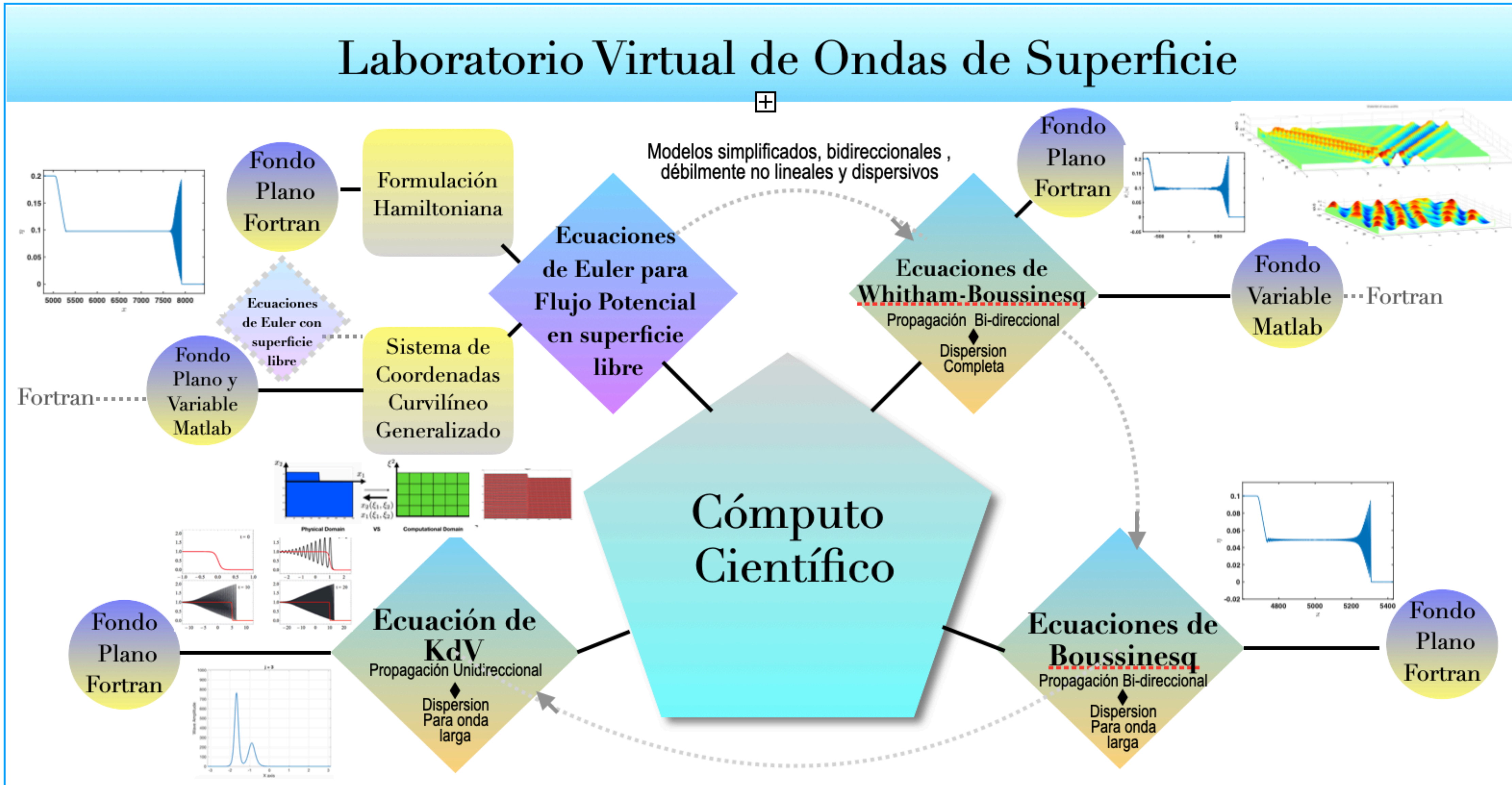
Desafíos

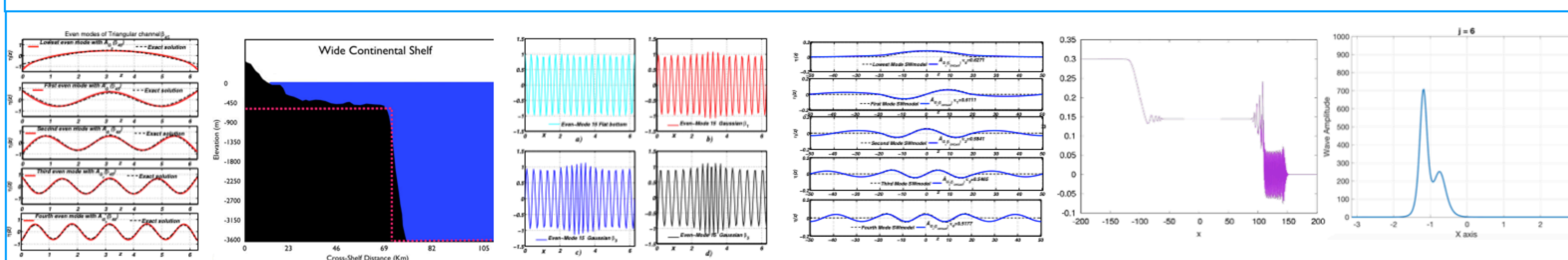
▶ Derivamos de un modelos asintóticos para la propagación de ondas internas en la interfaz entre dos capas de fluidos inmiscibles de diferentes densidades, bajo el supuesto de tapa rígida y con fondo plano.

▶ El modelo completo (de Euler) para esta situación se reduce a un sistema de ecuaciones de evolución planteadas espacialmente en una y dos dimensiones que involucran a dos operadores no locales.

▶ Los diferentes modelos asintóticos se obtienen expandiendo los operadores no locales con respecto a pequeños parámetros adecuados que dependen de diversas formas de la amplitud, longitudes de onda y relación de profundidad de las dos capas y que nos permitirá abordar una gran clase de regímenes de escala.

Laboratorio Virtual de Ondas Superficiales y ondas internas en fluidos estratificados





Fuente: Elaboración Propia

Resumen

- Se plantea el **estudio cuantitativo y cualitativo de ondas superficiales e internas en fluidos estratificados** que se encuentran en el régimen de ondas largas y bajo grandes variaciones de la topografía, los cuales describen procesos que ocurren en la Tierra.

- Los modelos que abordamos se derivan en el **marco de las formulaciones más recientes en teoría de ondas superficiales** en el agua y que han tenido un amplio desarrollo en el régimen de onda larga. Dichos modelos poseen una **estructura matemática muy rica** y un marco teórico muy completo que nos permite aplicar teorías avanzadas del análisis matemático y es posible su **implementación numérica.**

- Se describe la metodología para la **derivación de modelos de ondas** mas generales y pertinentes **que no tienen una contraparte con los modelos que existen en la actualidad.** Son modelos de frontera en la teoría matemática y que pretenden ser extendidos a otras disciplinas.

- El proyecto tiene una linea de investigación robusta y consistente con el estudio del fenómeno desde varios frentes, **analítico, numérico** y con la posibilidad de poder contrastar los resultados con **marcos experimentales** que pueden ser reproducidos en el laboratorio o bien fenómenos oceanográficos y atmosféricos. Los modelos buscan capturar con un nivel de detalle de gran precisión los efectos no lineales que se manifiestan en la propagación de las ondas en tiempos prolongados.

Gracias por su atención