

Mini Curso de 6 horas
En beneficio del fortalecimiento al Posgrado Nacional

Institución: CIMAT

Modelos de ondas en agua débilmente no lineales

Rosa María Vargas Magaña

<https://rosavargas.github.io/>

School of Mathematics, University of Edinburgh
Becario Postdoctoral CONACyT



**Curso dirigido a : Estudiantes e investigadores del Posgrado
en Ciencias con especialidad en Matemáticas Básicas y
Aplicadas**

***Curso abierto a todo público interesado de la comunidad
vinculada al Posgrado en Ciencias del CIMAT***

Objetivos:

1. Introducir la Teoría de ondas superficiales en el agua (2 horas)
2. Desarrollar la formulación Hamiltoniana del Problema de ondas en agua (2 horas)
3. Enunciar los modelos de ondas en agua débilmente no lineales que se derivan analíticamente de la formulación Hamiltoniana (2 horas)

Estructura del curso:

Teoría 📖: 3 horas,

Trabajo dirigido 📅: 1.5 horas:

Discusión 🧐: 1 hora

Descansos ☕: 0.5 horas

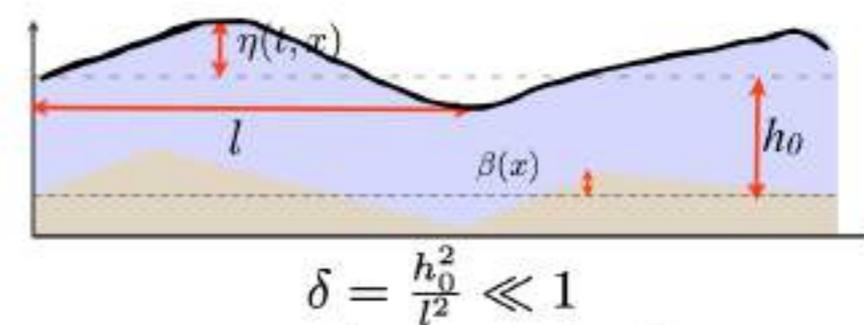
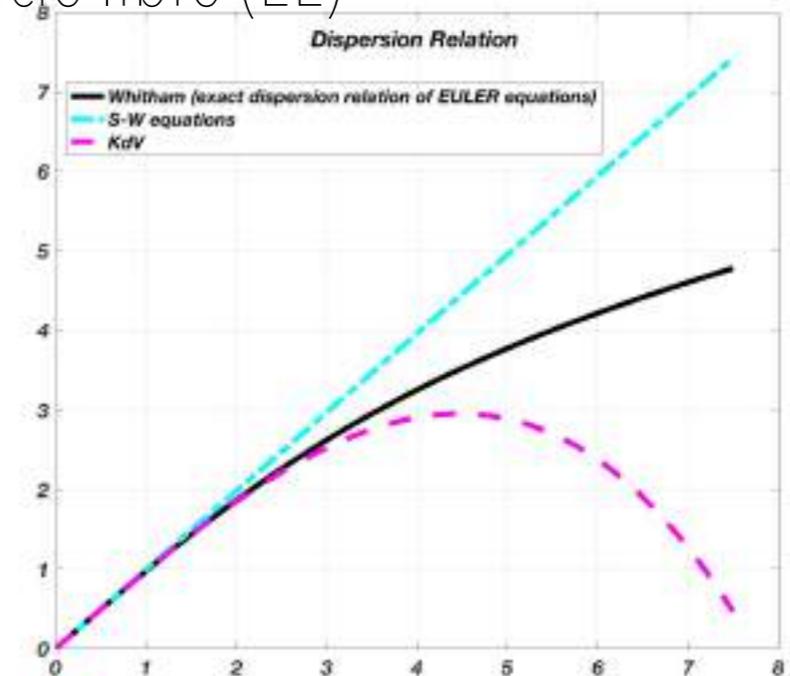
Temario:

- 1. Teoría de ondas superficiales en el agua**
 - Desarrollo de la Teoría
 - Modelación y Regímenes Físicos
 - Relevancia de la obtención de modelos simplificados
- 2. Formulación Hamiltoniana del Problema de ondas en agua.**
 - Ecuaciones de Euler
 - Operador Dirichlet-Neumann
 - Hamiltoniano
 - Ecuaciones de evolución
- 3. Modelos de ondas en agua débilmente no lineales que se derivan analíticamente de la formulación Hamiltoniana**
 - Régimen de onda larga
 - Ecuación Boussinesq, KdV
 - Sistema Whitham-Boussinesq

1. Teoría de ondas superficiales en el agua

• Desarrollo

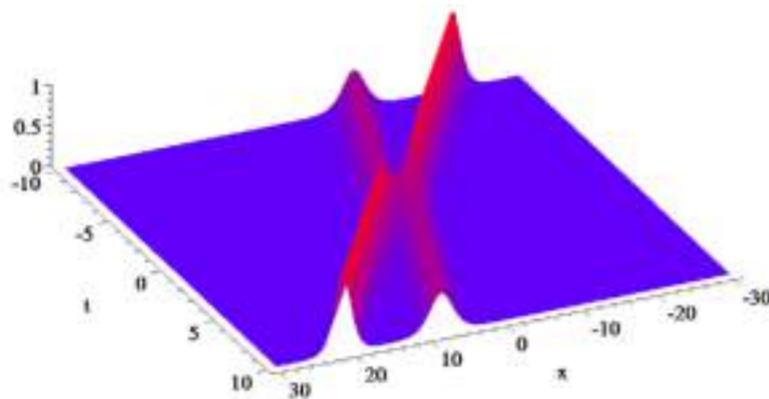
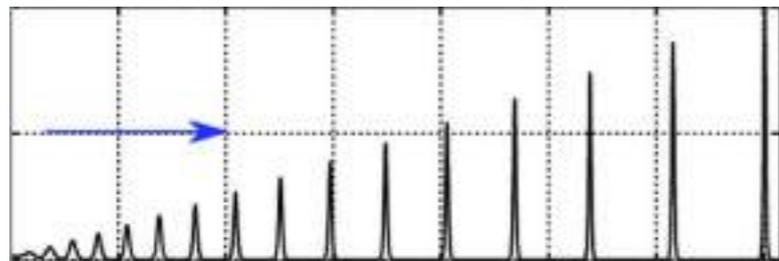
- ▶ **1755** Ecuaciones de Euler para un dominio con superficie libre (EE)
- ▶ **1872** Boussinesq
- ▶ **1895** Korteweg-de Vries
- ▶ **1967** Whitham
- ▶ **1968** Formulación Hamiltoniana del problema de ondas en agua **V. Zakharov**
- ▶ **1993** Introducción del Operador D-N en el Hamiltoniano del sistema. Derivación de ecuaciones Clásicas (KdV, Boussinesq, etc). **W. Craig y C. Sulem**
- ▶ **2013** Whitham-Boussinesq (Fondo Plano) **Aceves y P. Panayo**
- ▶ **2016 Whitham-Boussinesq (Fondo Variable)**
R.M Vargas-Magana y P. Panayotaros



Ecuación KdV

$$\eta_t + \frac{3}{2} \frac{g}{\sqrt{h_0}} \eta \eta_x + \eta_{xxx} = 0$$

- ▶ Infinitas cantidades conservadas
- ▶ Sus soluciones **no rompen**
- ▶ Las solutions de la KdV sólo son de dos tipos: **ondas tipo solitón** que sólo ocurren en un número finito y trenes de onda lineales



vs

Ecuación de Whitham

$$\eta_t + \eta \eta_x + K_{h_0} * \eta_x = 0$$

$$K_{h_0} := \mathcal{F}^{-1}(\sqrt{\frac{g}{\xi} \tanh(h_0 \xi)})$$

- ▶ Existencia de **ondas periódicas**

(Ehrnstrm, Kalisch, 2009)

- ▶ **Ondas solitarias** (Ehrnstrom, Groves, Wahlen, 2009),

- ▶ Las soluciones **sí rompen**

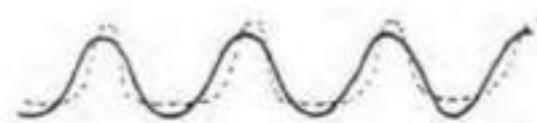
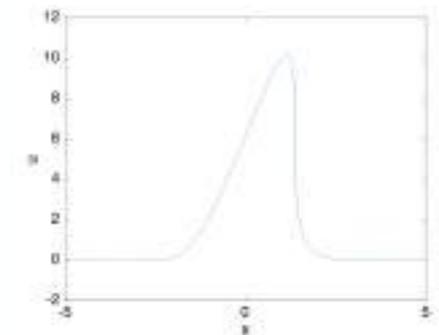
(Naumkin, Shishmarev, 1994),

(Constantin, Escher, 1998), (Hur, 2015)

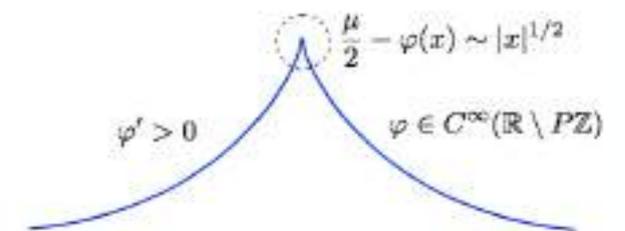
- ▶ **Stokes waves**

(Ehrnstrom, Wahlen, 2016).

- ▶ Mejor descripción de **ondas cortas**



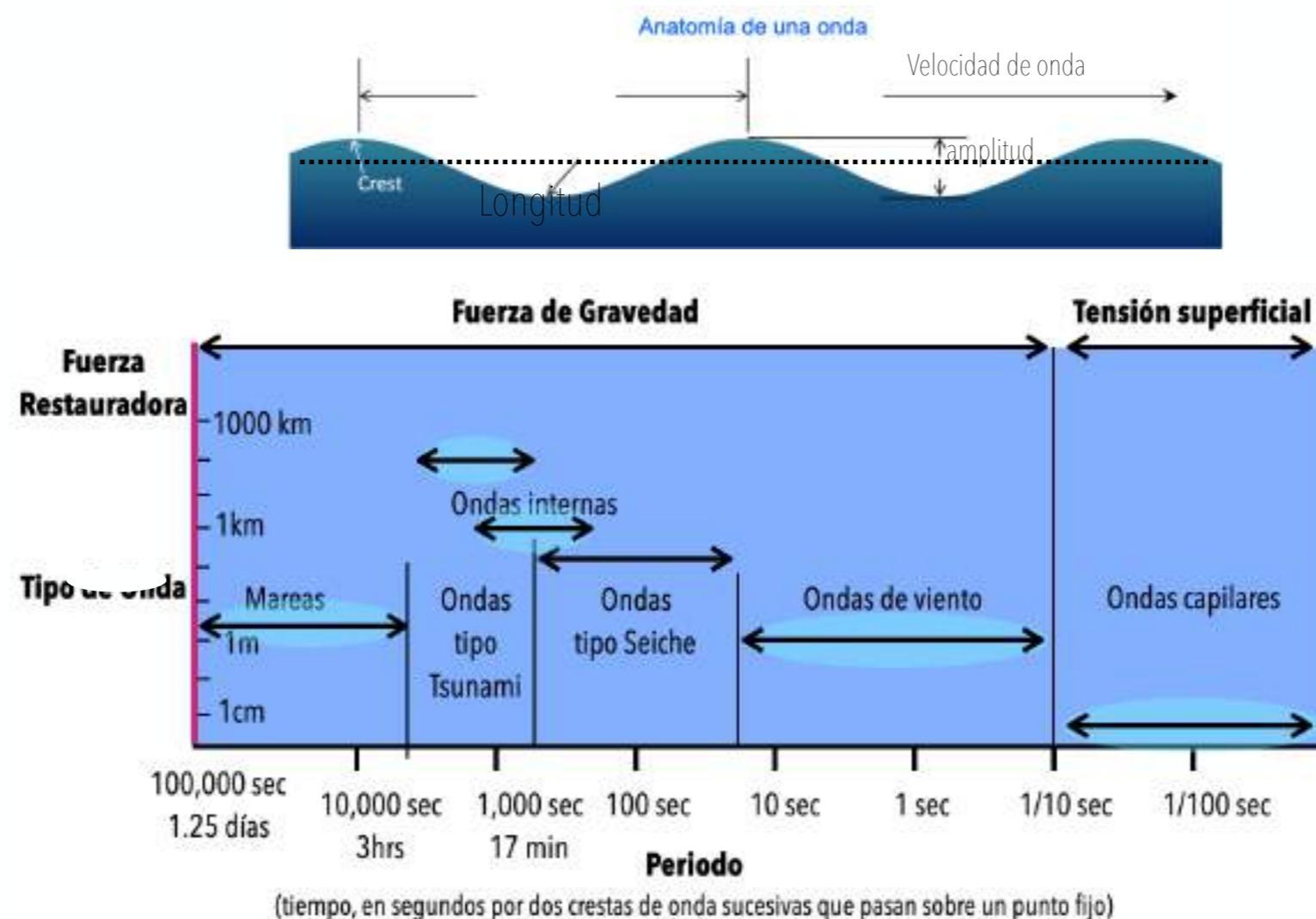
— linear wave
- - - Stokes wave



• Modelación y Regímenes Físicos

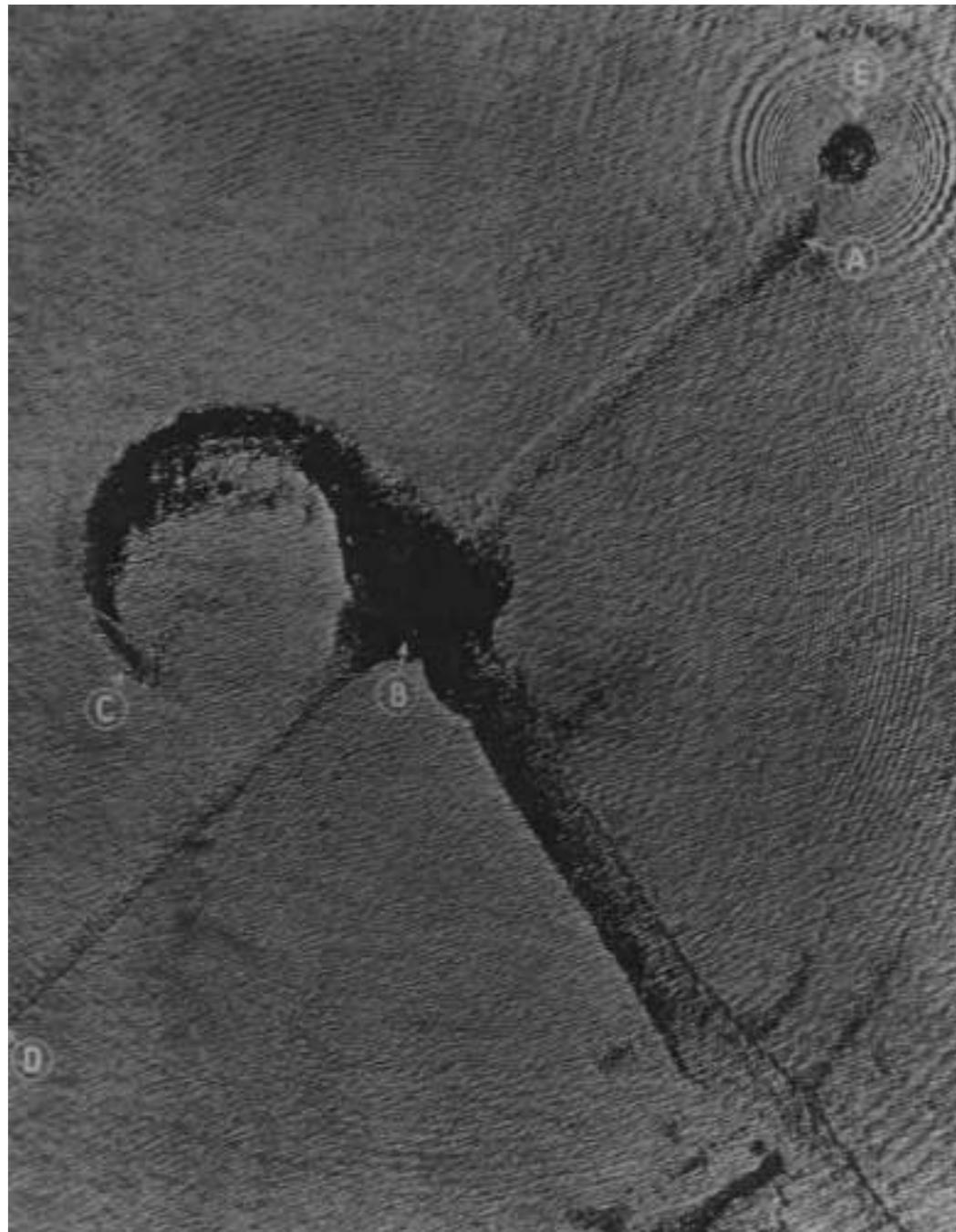
¿Cómo podemos obtener modelos simplificados?

1. **Las características del fluido:** densidad, homogeneidad, viscosidad, estratificación del fluido y si en el flujo hay vorticidad o las velocidades están dadas por un gradiente de velocidad.
2. Las **características típicas de las ondas de estudio:** amplitud, su longitud y periodo típica.



3. **Fuerzas que imperan en el fluido** como gravedad, tensión superficial u otras fuerzas superficiales como el viento.

La fuerza de restauración es **la gravedad**



$$\omega^2 = gk \tanh(h_0 k)$$

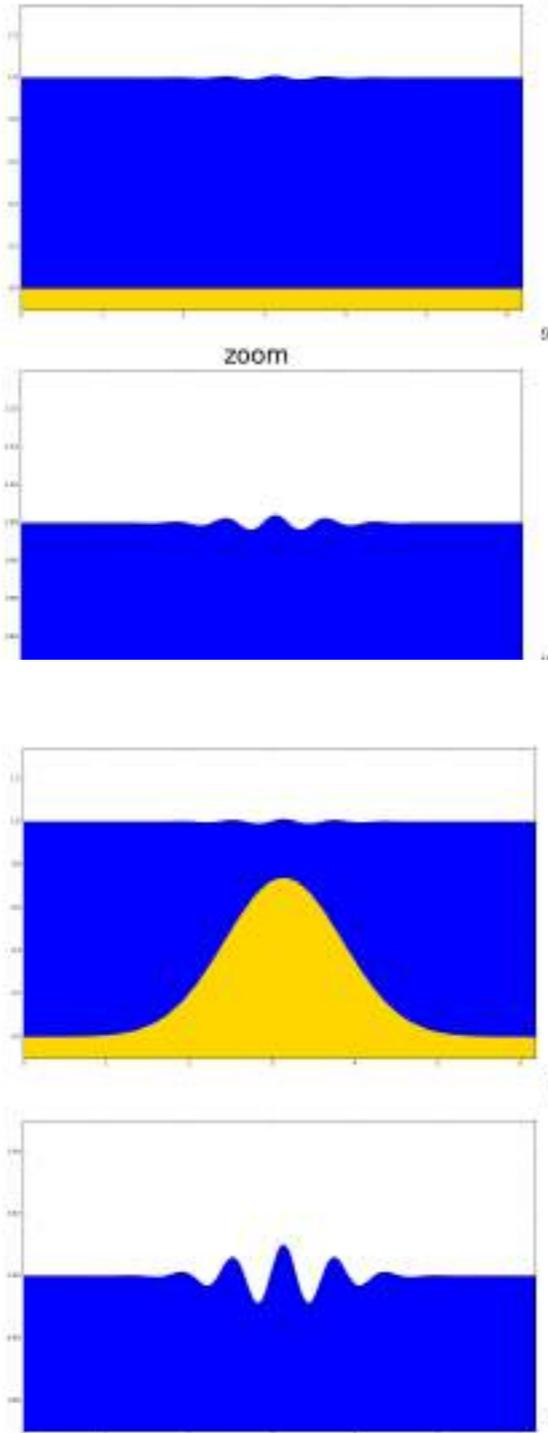
La fuerza de restauración es **la tensión superficial**



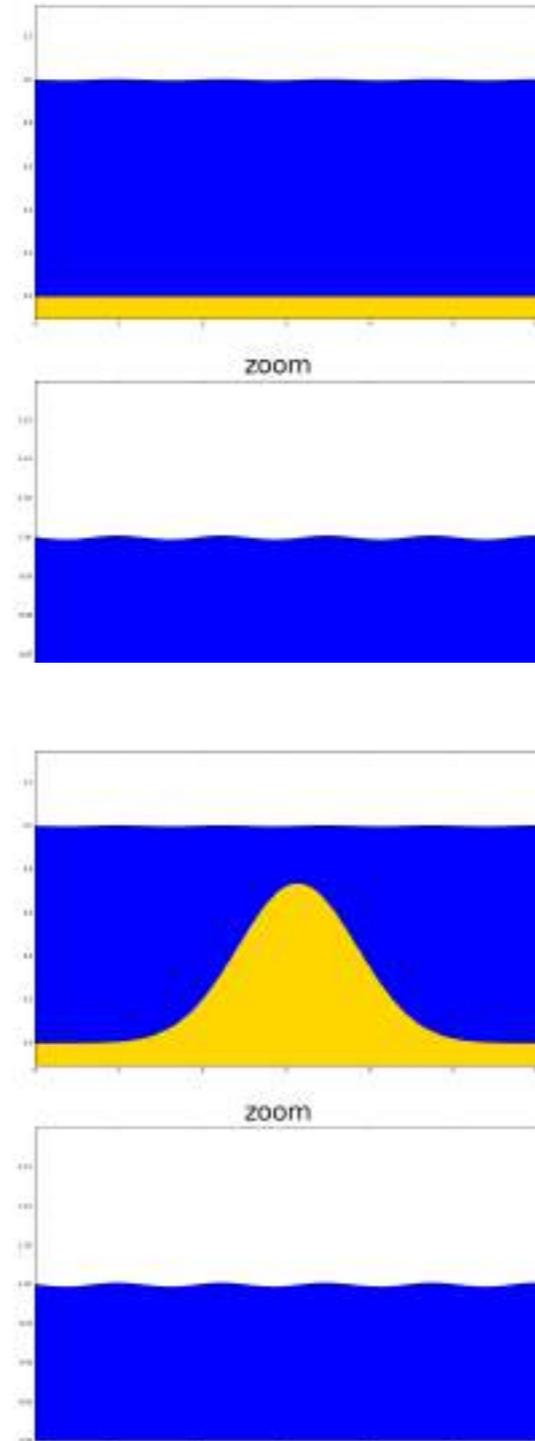
$$\omega^2 = (gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3) \tanh(kh)$$

4. **Dominios de fluido complicados** , variaciones grandes de la profundidad, formaciones terrestres irregulares, puntos y regiones singulares en la frontera.

1. Variación en la velocidad de Propagación



2. Destrucción de comportamientos periódicos



Simulaciones numéricas con el modelo *Whitham-Boussinesq* introducido en
▶ R. M. Vargas-Magaña, P. Panayotaros
A Whitham-Boussinesq long-wave model for variable topography, Wave Motion (2016)

DISCUSIÓN GRUPAL (15 min)

¿**Por qué es relevante** la obtención de estos modelos simplificados?

-  Gran desarrollo tecnológico en la instrumentación de medición **in situ** y en **laboratorio** de estos fenómenos.
-  Enorme capacidad de cómputo y el diseño de esquemas numéricos que preservan propiedades estructurales de las ecuaciones que ha permitido integrar numéricamente las ecuaciones por tiempos prolongados.
-  Se han registrado y documentado los **efectos no lineales** de la combinación de la dispersión de las ondas y la topografía y las fuerzas de restauración que se manifiestan ante la **propagación de ondas por** periodos prolongados del tiempo.
-  Se han observado numéricamente **ondas coherentes estables e inestables** y los **efectos de radiación, resonancia, disipación, vorticidad, enfoque y desenfoque** de las ondas, tren de ondas periódicos, frentes de ondas etc.

***DISCUSIÓN GRUPAL* (15 min)**

Desafíos en la modelación de ondas

- 1.** La limitación de algunos modelos **utilizados en la actualidad en varias disciplinas para la descripción de estos fenómenos.**
- 2.** La necesidad de derivación de modelos con **gran estructura que sean: matemáticamente tratables, numéricamente integrales y que logren capturar con el nivel de detalle cualitativo y cuantitativo los efectos no lineales que se manifiestan en la propagación de las ondas.**
- 3.** La relevancia de modelos que puedan ser **extendibles a otras dimensiones y a dominios con varios estratos.**

2. Formulación Hamiltoniana del Problema de ondas en agua.

Zakharov (1968) planteó las ecuaciones de evolución en forma de un sistema Hamiltoniano en donde las variables canónicas son las cantidades superficiales: $(\eta(x), \xi(x))$ con $\xi(x, t) = \varphi(x, \eta(x, t), t)$

$$\partial_t \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_\eta H \\ \delta_\xi H \end{pmatrix} = J\delta H,$$

$$\begin{aligned} H &= K + P && \text{V.E. Zakharov (1968), J.W. Miles, (1977)} \\ &= \int_x \int_{y=-h+\beta(x)}^{\eta(x)} \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 dy dx + \int_x \frac{g}{2} \eta^2 dx \\ K &= \int_D \rho \frac{|\nabla\varphi|^2}{2} dV = \frac{\rho}{2} \int_{\partial D} \nabla \cdot (\varphi \nabla\varphi) dV = \frac{\rho}{2} \int_{\partial D} \xi (\nabla\varphi \cdot \hat{n}) |_{y=\eta} dS \end{aligned}$$

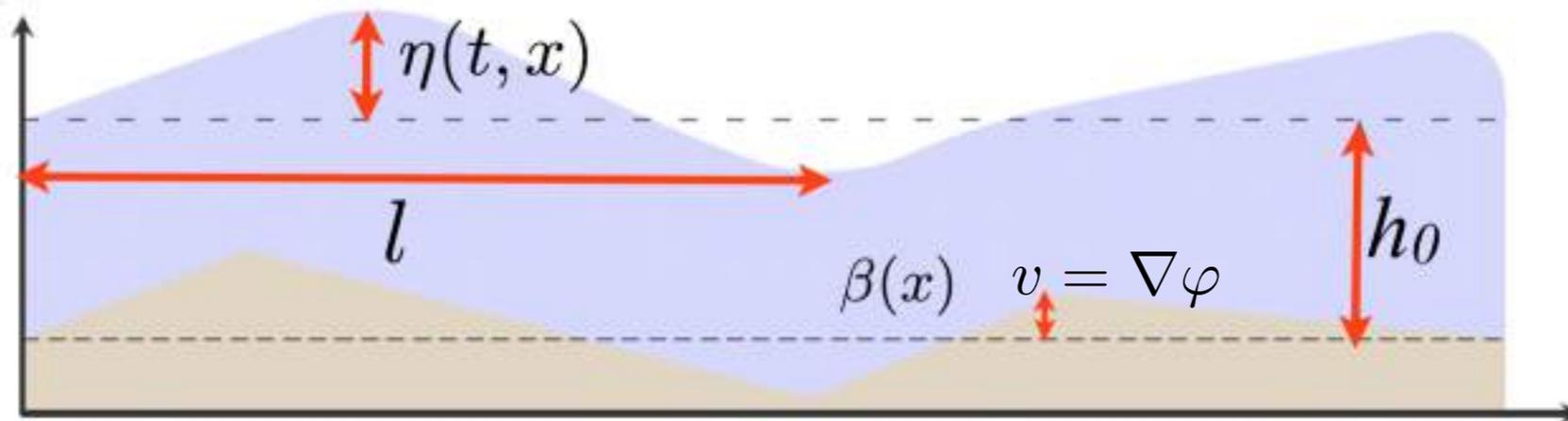
$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\xi G(\beta, \eta) \xi + g\eta^2) dx$$

W. Craig and C. Sulem (1993)

2. Formulación Hamiltoniana del Problema de ondas en agua.

Ecuaciones de evolución del problema de ondas en agua

- 1 $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad \mathcal{D}(\beta(x), \eta(x, t))$
- 2 $\eta_t + \eta_x \varphi_x - \varphi_y = 0 \quad y = \eta(x, t)$
- 3 $\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + g\eta = 0 \quad y = \eta(x, t)$
- 4 $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad y = -h_0 + \beta(x)$



Observación: $\eta_t = \varphi_y - \eta_x \varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$

Para un fluido:

- Inviscido • Homogéneo • Incompresible • Irrotational () • En un dominio simplemente conexo.

► Las condiciones de frontera en la superficie están dadas por ecuaciones fuertemente no lineales y las ecuaciones están aclopadas.

Ejercicio 1: Derivación de la ecuación e Bernoulli.

La 2da Ley e Newton aplicada a fluidos (15 min)



Dado un flujo potencial $u = \nabla\varphi$ y las suposiciones previas de la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\hat{e}_z$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi = \nabla\frac{\partial}{\partial t}\varphi$$

$$\frac{1}{2}\nabla(u \cdot u) = u \times \text{torsión } u + (u \cdot \nabla)u$$

$$\frac{1}{2}\nabla(u \cdot u) = (u \cdot \nabla)u$$

$$f = -g\hat{e}_z = -\nabla gz$$

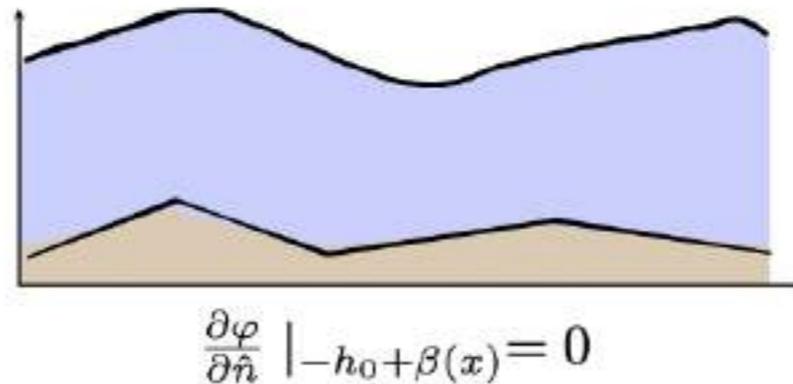
$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0$$

Integrando obtenemos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = 0$$

Operador Dirichlet-Neumann

Considera el dominio del fluido: $\mathcal{D}(\beta(x), \eta(x, t))$



Dada la condición de frontera del tipo Dirichlet $\xi(x)$, existe una única solución $\varphi(x, y)$ de

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 & \text{en } \mathcal{D}(\beta(x), \eta(x, t)) \\ \varphi(x, \eta(x)) = \xi(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} = 0 & \text{en } y = -h_0 + \beta(x) \end{cases}$$

Y el operador Dirichlet-Neumann. $G(\beta, \eta)$ se define como

$$G(\beta, \eta)\xi = \nabla \varphi |_{y=\eta} \cdot N \quad \text{en donde} \quad N = (-\partial_x \eta, 1)^T$$

$$\xi(x) \longmapsto \varphi(x, y) \longmapsto N \cdot \nabla \varphi (1 + |\nabla_x \eta|^2)^{1/2} := G(\eta)\xi(x)$$

Hamiltoniano del Problema de ondas en agua

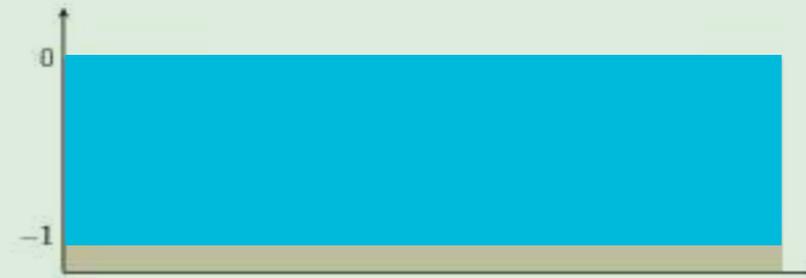
$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\xi G(\beta, \eta) \xi + g\eta^2) dx$$

$$\eta_t = G(\beta, \eta) \xi$$

$$\xi_t = \frac{-1}{2(1+\eta_x^2)} (\xi_x^2 - (G(\beta, \eta) \xi)^2 - 2\eta_x \xi_x G(\beta, \eta) \xi)^2 - 2\eta_x \xi_x G(\beta, \eta) \xi - g\eta$$

- ▶ En general no existe una expresión explícita para este operador!
- ▶ El único caso en el que es posible obtener una expresión del operador Dirichlet-Neumann es:

Ejercicio 2 : Derivación del operador Dirichlet-Neumann para el caso de fondo plano y estado de equilibrio del sistema i.e. dominio rectangular. (25 min)



$$[G(0, 0)] : \xi \longmapsto D \tanh(D)\xi \quad \text{¿Qué es este objeto?}$$

Donde D es el operador diferencial usual $D = -i\partial_x$

$$\xi(x) \longmapsto \hat{\xi}(\kappa) \longmapsto \kappa \tanh(h_0\kappa)\hat{\xi}(\kappa) \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \kappa \tanh(h_0\kappa)\hat{\xi}(\kappa)e^{i\kappa x}d\kappa := [D \tanh(h_0D)]\xi$$



Sea $D = D_t(\eta) \cup \delta_R D_t(\eta) \cup \delta_L D_t(\eta)$. Deseamos encontrar la solución al problema:

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = 0 \quad \text{en } D$$

$$\varphi(x, y) = \xi(x) \quad \text{en } \delta_L D_t(\eta)$$

$$\varphi_y(x, -h) = 0 \quad \text{en } \delta_R D_t(\eta)$$

Encontraremos la solución usando análisis de Fourier.

Supongamos que φ es la solución al problema anterior luego:

$$\hat{\varphi}(\omega, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \varphi(x, y) e^{i\omega x} dx \quad \text{debe satisfacer :}$$

$$\nabla^2 \hat{\varphi}(\omega, y) = \frac{\partial^2 \hat{\varphi}(\omega, y)}{\partial \omega^2} + \frac{\partial^2 \hat{\varphi}(\omega, y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{como} \quad \frac{\partial^2 \hat{\varphi}(\omega, y)}{\partial \omega^2} = (-i\omega)^2 \hat{\varphi} = -\omega^2 \hat{\varphi}$$

$$\text{Así} \quad \frac{\partial^2 \hat{\varphi}(\omega, y)}{\partial y^2} = -\omega^2 \hat{\varphi}(\omega, y)$$



Resolviendo obtenemos que:

$$\hat{\varphi}(\omega, y) = A(\omega)\sinh(\omega, y) + B(\omega)\cosh(\omega, y) \quad \star$$

Además $\hat{\varphi}(\omega, 0) = \hat{\xi}(\omega)$

luego $\hat{\varphi}(\omega, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \varphi(\omega, 0) e^{i\omega x} dx = \hat{\xi}(\omega)$

y de \star sabemos $\hat{\varphi}(\omega, 0) = B(\omega)\cosh(0) = B(\omega)$

por tanto $\hat{\xi}(\omega) = B(\omega)$

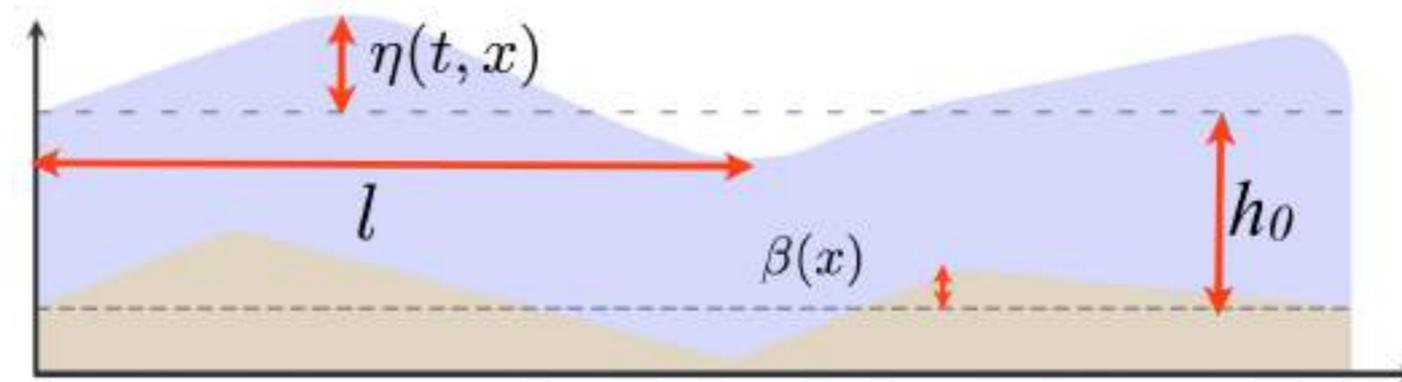
Ahora bien, puesto que $\hat{\varphi}_y(\omega, -h) = 0$

y de \star obtenemos que $\hat{\varphi}_y(\omega, y) = A(\omega)\omega\cosh(\omega y) + \hat{\xi}(\omega)\omega\sinh(\omega y)$

luego $\hat{\varphi}_y(\omega, -h) = A(\omega)\omega\cosh(\omega h) - \hat{\xi}(\omega)\omega\sinh(\omega h)$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{\hat{\xi}(\omega)\omega\sinh(\omega h)}{\omega\cosh(\omega h)} = \hat{\xi}(\omega)\tanh(\omega h)$$

Régimen de aguas someras



$$\delta = \frac{h_0^2}{l^2} \ll 1 \quad \sim \quad \epsilon = \frac{\eta}{h_0} \quad \text{¡Pequeño!}$$

Parámetros adimensionales

$$\delta = \frac{h_0^2}{l^2}$$

$$\gamma = \frac{\beta}{h_0}$$

$$\epsilon = \frac{\eta}{h_0}$$

Expansión analítica del operador $G(\beta, \eta)$

$$[G(\beta, \epsilon\eta)](\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} [G_n(\beta, \eta)](\xi) \epsilon^n$$

$$G(\beta, \eta) = G_0(\beta, \eta) + G_1(\beta, \eta) + G_2(\beta, \eta) + \dots$$

$G_j(\beta, \eta)$ are homogeneous of degree j in η .

$$G_0(\beta, \eta) = D \tanh(h_0 D) + DL(\beta),$$

$$G_1(\beta, \eta) = D\eta D - G_0\eta G_0,$$

$$G_2(\beta, \eta) = \frac{1}{2}(G_0 D \eta^2 D - D^2 \eta^2 G_0 - 2G_0 \eta G_1),$$

Coifman and Meyer (1985)

Craig, Schanz and Sulem (1997)

Craig and Sulem (2005)

Craig, Guyenne, Nicholls, Sulem (2005)

con $D = -i\partial_x$

y $L(\beta)$ involucra operadores **pseudo-diferenciales**

SHALLOW WATER REGIME (LONG-WAVE)

$$\delta = \frac{h_0^2}{l^2} \ll 1$$

BOUSSINESQ REGIME

$$\delta \sim \epsilon$$

BOUSSINESQ REGIME VARIABLE DEPTH (SMALL DEPTH VARIATIONS)

$$\epsilon \sim \delta \sim \gamma$$

Aceves-Sánchez, Minzoni and Panayotaros

Numerical of a nonlocal Model for water waves with variable depth, 2013

Ejercicio 2 en clase: Expansión de los primeros términos del operador hasta $O(2)$. (15 min)

Puesto que se aproximará al Hamiltoniano a orden 1 en α , sólo se deben considerar los términos \mathcal{G}_0 y \mathcal{G}_1 , debiendo truncarlos también hasta un orden 1 en β . Para \mathcal{G}_0 , tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0 &= \frac{\mu P \tanh(\mu P)}{\beta} = \frac{\mu P}{\beta} \left[\frac{\beta}{\mu P} \sum_{i=0}^{\infty} T_{2(i+1)} \beta^i P^{2(i+1)} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} T_{2(i+1)} \beta^i P^{2(i+1)} = T_2 P^2 + T_4 \beta P^4 + O(2) \\ &= \left(i \frac{\partial}{\partial x^*} \right)^2 - \frac{1}{3} \beta \left(i \frac{\partial}{\partial x^*} \right)^4 + O(2) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\left[1 + \frac{\beta}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial x^*} \right) + O(2)\end{aligned}$$

Para el término \mathcal{G}_1 se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 &= \frac{h}{\beta} G_1 = \frac{h}{\beta} D (\eta - \tanh(hD) \eta \tanh(hD)) D \\ &= \left(\frac{1}{h\beta} \right) hD (a\eta^* - \tanh(hD) a\eta^* \tanh(hD)) hD \\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \mu P (\eta^* - \tanh(\mu P) \eta^* \tanh(\mu P)) \mu P \\ &= \alpha P (\eta^* - \tanh(\mu P) \eta^* \tanh(\mu P)) P \\ &= \alpha P \left(\eta^* - \left[\mu P + \sum_{i=2}^{\infty} T_{2i} (\mu P)^{2i-1} \right] \eta^* \left[\mu P + \sum_{i=2}^{\infty} T_{2i} (\mu P)^{2i-1} \right] \right) P \\ &= \alpha P (\eta^* - \mu P \eta^* \mu P + O(2)) P = \alpha P \eta^* P - \underbrace{\alpha \beta P^2 \eta^* P^2}_{O(2)} + O(2) \\ &= -\alpha \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\eta^* \frac{\partial}{\partial x^*} \right) + O(2)\end{aligned}$$

- ▶ El operador $L(\beta)$, can be written in the semi-explicit form:

$$L(\beta) = -B(\beta)A(\beta)$$

donde

$$A(\beta)\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \sinh(\beta(x)k) \operatorname{sech}(hk) \hat{\xi}(k) dk,$$

$$C(\beta)\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \cosh(1 - \beta(x))k \hat{\xi}(k) dk,$$

y $B(\beta) = C(\beta)^{-1}$

W. Craig, P. Guyenne, D. Nicholls, C. Sulem (2005)

- ▶ Expansión del operador:

$$L_0(\beta) = 0,$$

$$L_1(\beta) = -\operatorname{sech}(hD)\beta D \operatorname{sech}(hD),$$

$$L_2(\beta) = \operatorname{sech}(hD)\beta D \sinh(hD)L_1(\beta),$$

***DISCUSIÓN GRUPAL* (15 min)**

Ventajas de este enfoque

- ▶ Modelos de alta precisión
- ▶ Una descripción cualitativa y cuantitativa fiel a la realidad
- ▶ Hay un formalismo teórico detrás de cada uno de estos modelos
- ▶ Modelos con estructura Hamiltoniana y con una formulación espectral
- ▶ Los esquemas numéricos son precisos y eficientes
- ▶ Los esquemas numéricos preservan la estructura Hamiltoniana
- ▶ Hay un control de la energía al tratarse de una cantidad conservada del sistema

El marco general de las **ecuaciones que gobiernan** la propagación de las ondas superficiales son las **Ecuaciones de Euler en superficie libre** las cuales desde el punto de vista matemático ofrecen grandes desafíos.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0 & \mathcal{D}(\beta(x), \eta(x, t)) \\
 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 & y = \eta(x, t) \quad \text{Condición de Cinemática} \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + g\eta &= 0 & y = \eta(x, t) \quad \text{Ecuación de Bernoulli} \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= 0 & y = -h_0 + \beta(x)
 \end{aligned}$$

Para un fluido:

- Inviscido
- Homogéneo
- Incompresible
- Irrotational ($v = \nabla \varphi$)
- En un dominio simplemente conexo.

► **Las condiciones de frontera en la superficie están dadas por ecuaciones fuertemente no lineales y las ecuaciones están acopladas.**

3. Modelos de ondas en agua débilmente no lineales que se derivan analíticamente de la formulación Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\xi G(\beta, \eta) \xi + g\eta^2) dx$$

Constant depth. $\delta \sim \epsilon \ll 1$

$$G_{\mathcal{A}_0} = \frac{\tilde{D}}{\sqrt{\epsilon}} \tanh(h_0 \sqrt{\epsilon} \tilde{D}) + \epsilon \tilde{D} \tilde{\eta} \tilde{D}$$

$$\tilde{D} = \frac{1}{l} D \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{a}$$

Smooth and small depth variations of order $\mathbf{O}(\epsilon)$. $\delta \sim \epsilon \sim \gamma \ll 1$

$$G_0(\beta, \eta) = D \tanh(h_0 D) + DL(\beta)$$

$$G_{\mathcal{A}_1} = \frac{\tilde{D}}{\sqrt{\epsilon}} \tanh(h_0 \sqrt{\epsilon} \tilde{D}) - h_0 \tilde{D} \tilde{\beta} \tilde{D} + \epsilon \tilde{D} \tilde{\eta} \tilde{D}$$

Aceves-Sánchez, Minzoni and Panayotaros

Numerical of a nonlocal Model for water waves with variable depth, Wave Motion 2013

3. Modelos de ondas en agua débilmente no lineales que se derivan analíticamente de la formulación Hamiltoniana

Depth variations of order $\mathbf{O}(1)$

$$G_{\mathcal{A}_2} = \text{Sym}\left(\frac{\tilde{D}}{\sqrt{\epsilon}} \tanh(\sqrt{\epsilon}(1 - \tilde{\beta}(x))\tilde{D})\right) + \epsilon\tilde{D}\tilde{\eta}\tilde{D}$$

Vargas-Magaña, and Panayotaros

A Whitham-Boussinesq long-wave model for variable depth, Wave Motion 2016

Satisfies some structural properties of the exact linear DN operator:

- $G_{\mathcal{A}_2}[\xi](x)$ is real if ξ is real valued
- $G_{\mathcal{A}_2}$ is a symmetric operator
- Spectra of this operator has good asymptotic behavior as κ increase we approach the constant depth dispersion relation and the same condition apply to the eigenfunctions.
- $G_{\mathcal{A}_2}$ is a positive operator.

 Se introdujeron un modelo de ondas en agua rico en estructura, que nos permite responder a preguntas y desvelar algunos mecanismos de la dinámica de la propagación de **ondas superficiales** en el régimen de ondas largas al incluir el efecto de la topografía.

 Los modelos que abordamos se derivan en el **marco de las formulaciones más recientes en teoría de ondas superficiales** en el agua y que han tenido un amplio desarrollo en el régimen de onda larga. Dichos modelos poseen una **estructura matemática muy rica** y un marco teórico muy completo que nos permite aplicar teorías avanzadas del análisis matemático y es posible su **implementación numérica**.

 Se describe la metodología para la **derivación de modelos de ondas** más generales y pertinentes **que no tienen una contraparte con los modelos que existen en la actualidad**. Son modelos de frontera en la teoría matemática y que pretenden ser extendidos a otras disciplinas.

Referencias de Investigación

- 32G.B. Whitham, “Non-linear dispersive waves,” Proc. Roy. Soc. London A, 283, 238–261 (1965).
- 33A.V. Gurevich and L.P. Pitaevskii, “Nonstationary structure of a collisionless shock wave,” Sov. Phys. JETP, 33, 291–297 (1974).
- 34H. Flaschka, M.G. Forest and D.W. McLaughlin, “Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg-de Vries equation,” Comm. Pure Appl. Math., 33, 739–784 (1980).
- 35G.A. El, “Resolution of a shock in hyperbolic systems modified by weak dispersion,” Chaos, 15, 037103 (2005).
- 36J.W. Miles, “On Hamilton’s principle for surface waves,” J. Fluid Mech., 83, 153–158 (1977).
- 37A.C. Radder, “An explicit Hamiltonian formulation of surface waves in water of finite depth,” J. Fluid Mech., 237, 435–455 (1992).
- 38V.E. Zakharov, “Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid,” J. Appl. Mech. Tech. Phys., 9, 190–194 (1968).
- 39P. Aceves-Sánchez, A.A. Minzoni and P. Panayotaros, “Numerical study of a nonlocal model for water-waves with variable depth”, Wave Motion, 50, 80–93 (2013).
- 40R. M. Vargas-Magaña and P. Panayotaros, “A Whitham-Boussinesq long-wave model for variable topography”, Wave Motion, 65, 156–174 (2016).
- 41V. Hur and L. Tao, “Wave breaking in a shallow water model”, SIAM J. Math. Anal., 50, 354–380 (2018).
- 42V. Hur and A.K. Pandey, “Modulational instability in a full-dispersion shallow water model,” Stud. Appl. Math., 142, 3–47 (2019).
- 43J.D. Carter, “Bidirectional Whitham equations as models of waves on shallow water,” Wave Motion, 82, 51–61 (2018).
- 44G.B. Whitham, “Variational methods and applications to water waves,” Proc. Roy. Soc. London A, 299, 6–25 (1967).
- 45P. I. Naumkin and A. Shishmarev. Nonlinear Nonlocal Equations in the Theory of Waves, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Rhode Island (1994).
- 46A. Constantin and J. Escher. “Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations”, Acta Mathematica, 181, 229–243 (1998).
- 47M. Ehrnström and H. Kalisch, “Traveling waves for the Whitham equation”, Diff. Int. Eqn., 22, 1193–1210 (2009).
- 48M. Ehrnström, M. D. Groves and E. Wahlén, “On the existence and stability of solitary-wave solutions to a class of evolution equations of Whitham type”, Nonlinearity, 25, 2903–2936 (2012).

Referencias de Investigación

- 49 M. Ehrnström and E. Wahlén. “On Whitham’s conjecture of a highest cusped wave for a nonlocal dispersive equation”, *Annales de l’Institut Henri Poincaré C Analyse non linéaire*, 36, 1603–1637 (2019).
- 50 V. M. Hur, “Wave breaking in the Whitham equation”, *Advan. Math.*, 317, 410–437 (2017).
- 51 W. Craig, P. Guyenne, D. P. Nicholls, and C. Sulem, “Hamiltonian long-wave expansions for water waves over a rough bottom,” *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 461(2055), 839–887 (2005).
- 52 D. Moldabeyev, H. Kalisch and D. Dutykh, “The Whitham equation as a model for surface water waves,” *Physica D*, 309, 99–107 (2015).
- 53 H. Borluk, H. Kalisch and D.P. Nicholls, “A numerical study of the Whitham equation as a model for steady surface water waves,” *J. Comp. Appl. Math.*, 296, 293–302 (2016).
- 54 T.B. Benjamin, “Instability of periodic wavetrain in nonlinear dispersive systems,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 299, 59–76 (1967).
- 55 W. Craig and M.D. Groves, “Hamiltonian long-wave approximations to the water-wave problem,” *Wave Motion*, 19, 367–389 (1994).
- 56 B. Fornberg and G.B. Whitham, “Numerical and theoretical study of certain non-linear wave phenomena,” *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A— Math. and Phys. Sci.*, 289, 373–404 (1978).
- 57 W. Craig and C. Sulem, “Numerical simulation of gravity waves,” *J. Comp. Phys.*, 108, 73–83 (1993).
- 58 P. Guyenne, “A high-order spectral method for nonlinear water waves in the presence of a linear shear current,” *Compt. Fluids*, 154, 224–235 (2017).
- 59 L.N. Trefethen, *Spectral Methods in MATLAB*, SIAM, Philadelphia (2000).
- 60 T.F. Chan and T. Kerkhoven, “Fourier methods with extended stability intervals for KdV,” *SIAM J. Numer. Anal.*, 22, 441–454 (1985).
- 61 P. Guyenne and D. Nicholls, “Numerical simulation of solitary waves on plane slopes,” *Math. Comput. Simul.*, 69, 269–281 (2005).
- 62 T. Grava and C. Klein, “Numerical study of a multiscale expansion of the Korteweg-de Vries equation and Painlevé-II equation,” *Proc. Roy. Soc. A*, 464, 733–757 (2008).
- 63 R. Haberman, “The modulated phase shift for weakly dissipated nonlinear oscillatory waves of the Korteweg-de Vries type,” *Stud. Appl. Math.*, 78, 73–90 (1988).
- 64 M.J. Ablowitz, J.T. Cole and I. Rumanov, “Whitham equations and phase shifts for the Korteweg-de Vries equation,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 476, 20200300 (2020).